This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

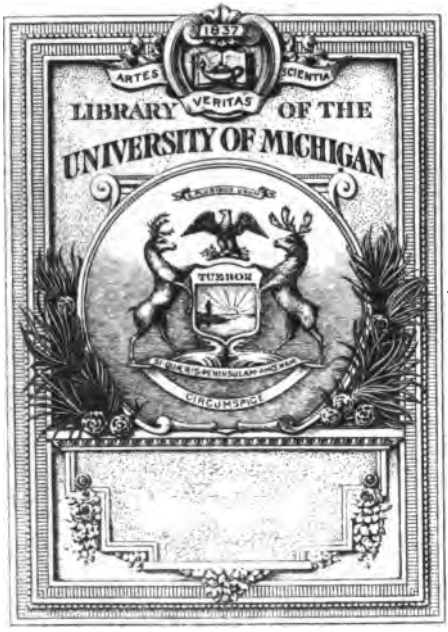
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

BIBLIOTECA RICCARDI
in Modena
S. VII F. 4. N. 52.

20



QA
35
.P22

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE THÉORI-PRATIQUE,

EN SA PLUS GRANDE PERFECTION:

DIVISÉ EN DEUX PARTIES.

Où l'on réduit à des principes généraux les opérations numériques, qui regardent principalement les Arts & le Commerce, tant en entiers, qu'en parties usuelles, & aussi en logarithmes, en fractions communes, & en décimales.

Par les métodes les plus courtes & les plus aisées,

Avec les démonstrations simples & naturelles des opérations, indépendamment de la Géométrie & de l'Algébre.

LE TOUT ENRICHI DE QUANTITÉ D'EXEMPLES.

Ouvrage utile à toutes sortes de Commerçans, Banquiers, Financiers, & principalement à tous ceux qui veulent entrer dans les Mathematiques.

Par Mr. PARENT de l'Académie Royale des Sciences.

A PARIS,
Chez { JEAN DE NULLY, rue S. Jacques, à l'Image S. Pierre.
Et CLAUDE JOMBERT, Quay des Augustins.

M. DCCXIV.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Lib. Com.
Maglione
2-24-28
16615

APPROBATION.

J'AY lû par ordre de Monſeigneur le Chancelier un *Traité d'Arithmetique Théori-pratique*, qui m'a paru très-propre pour inſtruire ceux qui veulent apprendre l'Arithmetique. FAIT à Paris ce vingt-uniéme Septembre mil ſept cent treize.

CASSINI.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS par la grace de Dieu, Roy de France & de Navarre. A nos amez & feaux Conſeillers, les gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Senechaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra; SALUT. Notre cher & bien amé LE SIEUR PARENT Nous ayant fait expoſer qu'il deſireroit faire imprimer *des Elémens de Mathématique* de ſa compoſition, dont il deſireroit donner au public, s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour la ville de Paris ſeulement; Nous avons permis & permettons, par ces Preſentes, audit Sieur Parent de faire imprimer ledit Livre en telle forme, marge, caractere, & autant de fois que bon lui ſemblera, & de le faire vendre & debiter par tout notre Royaume, pendant le temps de dix années conſecutives, à compter du jour de la datte deſdites Preſentes: *Faiſons* deffenſes à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance; & à tous Imprimeurs, Li-

braires, dans ladite Ville de Paris seulement, d'imprimer ou faire imprimer ledit Livre en tout, ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits, & d'y en faire venir, vendre & debiter d'autre impression, que de celle qui aura été faite pour ledit St Exposant, sous peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de mil livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit St Exposant, & de tous dépens dommages & interests; *à la charge* que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, & ce dans trois mois de la datte d'Icelle, que l'impression dudit Livre sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & en beaux caracteres, conformément aux Reglemens de la Librairie: Et qu'avant que de l'exposer en vente, il en sera mis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & feal Chevalier Chancelier de France le Sieur Daniel-François Voisin, Commandeur de nos Ordres: le tout à peine de nullité des Presentes. *Du contenu* desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit St Exposant, ou ses ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchemens. *Voulons* que la copie desdites Presentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin dudit Livre soit tenuë pour dûëment signifiée; & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conseillers & Secretaires, foy soit ajoutée comme à l'original. *Commandons* au premier notre Huissier ou Sergent, de faire pour l'execution d'Icelles tous actes requis & necessaires, sans demander autre permission, & nonobstant cla-

meur de Haro, Chartre Normande & Lettres à ce contraires : CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Verſailles le ſeiziéme jour du mois d'Aouſt, l'an de grace mil ſept cent quatorze ; Et de notre Regne le ſoixante-onziéme. Par le Roy en ſon Conſeil.

FOUQUET.

Regiſtré ſur le Regiſtre no 3. *de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, page* 846. no 1042. *conformément aux Réglemens, & notamment à l'Arreſt du* 13. *Aouſt* 1703. *à Paris le* 20. *Aouſt* 1714. ROBUSTEL, *Syndic.*

ERRATA.

Page 19. Ligne 28. & 29. chiffre 3 ſous. pag. 25. lig. 9. on indiquera dans. p. 32. l. 3. & 4. comme 578 pourroit. p. 33. l. 13. comme ſi l'on a. p. 37. l. 31. multipliant 15 par une. p. 39. l. 24. mais 5780, ainſi. p. 47. Déduit. 279805. p. 50. l. 16. avec les 5 ſols. p. 53. l. 14. dracmes de dracmes par. p. 58. l. 27. 16 & 3, qui. p. 72. $\frac{22554}{23104}$ liv. p. 74. l. 10. *moyens entre eux eſt égal.* p. 75. l. 29. aux précédentes. Car. p. 78. l. 9. operer d'eux-mêmes. p. 81. au bas ont valu 8 ℔ 5 ſ. 3. d. p. 82. l. 7. 378966 deniers. 22 ℔ 8 ſ. 1 d. p. 83. combien 230 au $\frac{1}{6}$ ayant $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{2}$ delay. p. 85. l. 11. *regle de trois ſimple.* p. 87. l. 20. ſecond 1440 aura l. 25. & (1400) les 3. p. 88. l. 10, 12, & 26. (1400 par 36). pag. 90 l. 7. 36 parties d'ouvrage. p. 91. l. 32. la propoſition, & faiſant. p. 95. 372 $\frac{8}{11}$ 22 $\frac{8}{11}$. p. 105. l. 12. 13 ℔ - 1 ſ. - 0 d. p. 112. l. 14 & 15. 22 ℔ & 35 ℔. p. 113. l. 13. comme 13 au 1r. l. 24. a 35 ℔ la 2e. p. 114. l. 8. dracmes, & 22 ℔. par. p. 117. l. 17. par 56. c'eſt à dire. p. 125. l. 19. de l'article 1. [Si. p. 133. l. 21. qui ſe rencontre entre.

Prenez le reſte de l'errata à la fin des anſômes.

AVERTISSEMENT AU LECTEUR.

Le Lecteur eſt prié de jetter les yeux ſur la Table ſuivante ; elle l'inſtruira des matieres que ce Traité contient, de l'ordre que l'on y a tenu, & de ce qui s'y trouve de nouveau, mieux que je ne pourrois faire par une longue & ennuyeuſe Préface.

TABLE

DES MATIERES CONTENUES dans la premiere Partie.

Les étoiles marquent les endroits où l'on trouvera quelque choſe de nouveau.

CHAP. I. *La maniere d'écrire & d'énoncer toutes ſortes de nombres, tant en chiffre Arabe, qu'en Romain*, Page 1.

CHAP. II. *De l'Addition des Entiers*, 6

Théorie de l'Addition, 10

CHAP. III. *De la ſouſtraction des Entiers*, 10

Théorie de la ſouſtraction, 13

CHAP. IV. *De la multiplication des Entiers*, 15

* *Abbreviations pour multiplier depuis 10 juſqu'à 20, & autres*, 23

Théorie de la multiplication, 25

CHAP. V. *De la diviſion des Entiers*, 29

Théorie de la Diviſion, 39

Abbregez de la Diviſion, 35

* *Remarques ſur les multiplications & diviſions qui s'entreſuivent*, 37

CHAP. VI. *De l'Addition des Entiers, avec parties relatives les unes aux autres*, 41

Des Parties abſoluës, ou qui n'ont raport qu'à l'Entier, 43

CHAP. VII. *De la ſouſtraction des Entiers, avec Parties relatives les unes aux autres*, 45

Des Parties abſoluës, ou qui n'ont raport qu'à

l'Entier, Page 47
CHAP. VIII. *De la multiplication des* Entiers *avec parties, par des* Entiers, 49
* *Multiplication effective d'*Entiers *& parties par* Entiers *& parties*, 51
*Multiplication d'*Entiers *& parties, par les parties Aliquotes*, 54
Multiplication d'eſpeces differentes, comme de livres, ſols & deniers, par toiſes, pieds & pouces, &c. 57
Théorie de la Multiplication des Entiers *& parties*, 59
CHAP. IX. *De la Diviſion des* Entiers *avec parties par des* Entiers, 61 & 62
De la Diviſion des Entiers *avec parties par des* Entiers *avec parties*, 63
Théorie de la Diviſion des Entiers *avec parties*, 65
CHAP. X. *Des Régles de proportion droites & ſimples*, 66
Théorie des Régles de proportion droites & ſimples, 73
CHAP. XI. *Des Régles de proportion inverſes & ſimples*, 75
Théorie des Régles inverſes & ſimples, 78
CHAP. XII. *Des Régles de proportion compoſées & droites*, 79
* *De leur application aux choſes étendues en longueur & largeur*, 83
De la Régle Conjointe droite, 84
Théorie ſur les proportions compoſées & droites, 85
CHAP. XIII. *Des Régles de proportion compoſées & inverſes*, 89
* *Regle Conjointe inverſe*, 93
CHAP. XIV. *Des Regles de ſocieté ſimples*, 95
Theorie des regles de ſocieté ſimples, 100
CHAP. XV. *Des Regles de ſocieté compoſées, ou avec differens temps*, 102

* *Du cas où il y a pluſieurs claſſes d'Aſſociez*, 105
Theorie des Regles de ſocieté compoſées, 106
* CHAP. XVI. *Des Regles d'Eſtimation ſur la force, la quantité, le temps, le nombre, &c.* 108
Théorie ſur les Regles d'Eſtimation, 110
CHAP. XVII. *Des Regles d'Alliage, ou des Equivalens ſur les valeurs*, 112
* *Application aux poids de diverſes choſes*, 115
* *Application aux volumes de diverſes choſes*, 117
* *Application aux viteſſes ou lenteurs de differens agens*, 120
* *Application aux forces de differens agens*, 123
Application au gain, dépenſe, ouvrage, &c. 125
Théorie des Alliages, 127
CHAP. XVIII. *Des Proportions & Progreſſions Aritmetiques, & des Progreſſions geometriques*, 129
Théorie des Proportions & Progreſſions Arithmetiques, 132
Application des progreſſions geometriques à des agens qui ſe ſuivent, avec differentes viteſſes, 136
* *Application des Progreſſions geometriques, double & triple à la ſtatique*, 137
Théorie des Progreſſions geometriques, 139
CHAP. XIX. *Des Logarithmes & des operations qui ſe font par leur moyen*, 142
Du changement de la ſouſtraction des quarrez en Addition de logaritmes, 143
Du changement de la Multiplication de nombres en Additions de Logarithmes, & de la Diviſion en ſouſtraction dans les regles de proportion compoſées, 144
* *Du changement de la compoſition des puiſſances, ou multiplication égale de raports, en multiplication ſimple de nombres; & de l'Extraction des racines, ou diviſion égale des raports, en de ſimples diviſions de nombres, dans les regles d'intereſts redoublez*, Page 119. 151 & 153

* *Réglé de compenſation de payement dans les intereſts redoublez, appellée* Régle d'Eſcompte de payement entre Banquiers, 153
Théorie des Logarithmes & des Regles d'intereſts redoublez, 156

SECONDE PARTIE.

CHAP. I. *De l'Extraction des racines quarrées des Entiers & parties,* Page 159
De la comparaiſon des racines de deux lignes. 165
De l'approximation indéfinie des racines quarrées, 167
Theorie des Racines quarrées, 167
* *Maniere de faire, par les racines quarrées, des Quarrez parfaits vuides, dont le vuide ſoit donné,* 174
* *Maniere de faire, par les racines quarrées, des Rectangles donnez vuides, dont le vuide ſoit auſſi donné,* 175
* *La même choſe ſur les Triangles équilateraux,* 176
* *La même choſe ſur les Exagones,* 177
CHAP. II. *Des operations d'Arithmetique ſur les fractions, & ſur les Fractions de Fractions,* 180
* *Réduction des Fractions à une même plus ſimple dénomination,* 183
Reduction de Fractions de fractions à la plus ſimple fraction, 185
* *Addition & ſouſtraction de Fractions, par leſquelles on prouve que la Quadrature du cercle eſt impoſſible en nombres rationnels,* 186
* *Application des multiplications de Fractions aux Regles de proportion compoſées & Conjointes,* 189
* *Application des fractions aux regles Teſtamentaires,* 191
Théorie des operations ſur les Fractions, 192

CHAP. III. De l'Arithmetique Chinoiſe, ou des Parties décimales, 197
* Multiplication d'Entiers & parties par Entiers & parties par les milliémes de l'Entier, au moyen d'une table, 207
* Diviſion d'Entiers & parties par Entiers & parties, par les milliémes de l'Entier, au moyen d'une Table, 209
* Regle de proportion en Entiers & parties reſolue par les milliémes de l'Entier, avec une Table, 210
* 3 Tables pour la comparaiſon des livres, ſols & deniers; des toiſes, pieds & pouces, & des livres, onces, drachmes, deniers & grains, avec les milliémes, & dix milliémes parties de l'Entier, 212
CHAP. IV. Parallelle des métodes de la premiere Partie, avec quelques-unes des plus uſitées,
Sur la ſouſtraction, 214
Sur la Diviſion des Entiers en ſix manieres differentes, 218
* Nouvelle Diviſion Françoiſe plus courte qu'aucune, 218
* Sur la Multiplication des Entiers avec parties, en ſix manieres differentes, 222
CHAP. V. Additions à la premiere Partie. 227
* Regle de compenſation de tems pour des payemens à des Marchands, ou eſcompte de tems entre Marchands, 228
* Regle de compenſation de tems pour des payements à des Tuteurs, Banquiers, Marguilliers, &c. ou eſcompte de tems entre Banquiers, 229
* Regle de compenſation de payement à des Marchands, ou eſcompte de payement entre Marchands, 232
* Regle de compenſation de payement à des Banquiers, Tuteurs & Marguilliers, ou eſcompte de payement entre Banquiers. 235

Principes de raiſon, ou Axiômes naturellement connus, d'où les Théories de ce Traité ont été tirées, avec les lieux où l'on s'en ſert.

Les définitions & les exemples des chapitres éclairciront ce qu'on pourroit trouver d'obſcur dans ces axiômes.

1 LE tout n'eſt autre choſe que l'aſſemblage de ſes differentes parties, 1re Part. ch. 2. art. 6. ch. 3. art. 4. ch. 4. art. 8. ch. 5. art. 7. & 8. ch. 6. art. 1. & 2. ch. 7. art. 1.

2 C'eſt la même choſe d'opérer ſur toutes les parties d'un tout, que ſur le tout même. 2e Part. ch. 4. art. 3. 3e méth.

3 Un tout étant compoſé de tant & telles parties qu'on voudra, on peut toujours en prendre une ſeule pour une 1re partie, & toutes les autres enſemble pour une 2e. 1re Part. ch. 1. art. 5.

4 Les tous qui contiennent chacun un nombre de parties égales, ſont égaux. 1re Part. ch. 18. art. 7.

5 Deux nombres qui ont un avantage égal l'un ſur l'autre, ſoit pour ſe contenir, ſoit pour ſe ſurpaſſer, ſont évidemment égaux. 1re Part. ch. 10. art. 5. ch. 17. art. 7. ch. 18. art. 3. 2e Part. ch. 2. art. 2.

6 Deux quantitez égales demeurent encore égales, en les augmentant ou diminuant, multipliant ou diviſant chacune également, ou prenant de ſemblables puiſſances, ou de ſemblables racines des unes & des autres. 2e Part. ch. 5. art. 3. & 5.

7 Un nombre fini d'unitez ajouté à un nombre infini, n'en change nullement la nature. 2e Part. ch. 2. art. 4.

8 Une verité ne peut jamais ſe trouver contraire à une autre verité. 1re Part. ch. 14. art. 4.

9 La difference de deux nombres eſt la même,

ſoit qu'on diminuë le plus grand de quelque choſe, avant d'en ôter le plus petit; ſoit qu'on augmente ce plus petit d'autant, avant de le retrancher du premier. 1re Part. ch. 3. art. 5.

10 La ſomme des differences de pluſieurs nombres qui ſe ſuivent, ſoit en augmentant, ſoit en diminuant ſucceſſivement, eſt égale à la ſeule difference totale du plus grand au plus petit. 1re Part. ch. 18. art. 7.

11 Un produit contient un de ſes deux produiſans pris à ſouhait autant de fois, ou en la même maniere que l'autre produiſant contient l'unité. 1re Part. ch. 4. art. 2. 2e Part. ch. 4. art. 4e méth.

12 Un produit croît ou diminuë à proportion que le nombre multiplié, ou que le multiplicateur, ou que tous les deux enſemble croiſſent ou diminuent. 1re Part. ch. 4. art. 8. ch. 8. art. 2. & 3.

13 Un produit demeure toujours le même, lorſqu'on rabaiſſe autant le multipliende, qu'en recompenſe on éleve ſon multiplicateur. 1re Part. ch. 4. art. 8.

14 Dans un partage égal c'eſt la même choſe de diſtribuer un tout à pluſieurs partagez, qu'une partie du tout à une ſemblable partie des mêmes partagez. 1re Part. ch. 5. art. 5. ch. 12. art. 4.

15 Le Quotient d'une Diviſion contient l'unité autant de fois, ou en la même maniere, que le Dividende contient ſon Diviſeur. 1re Part. ch. 5. art. 1. 2e Part. ch. 4. art. 11.

16 C'eſt la même choſe de multiplier une quantité par un premier nombre quelconque, & diviſer enſuite le produit par un ſecond; que de multiplier cette même quantité par une partie du multiplicateur, & de diviſer enſuite le produit par une ſemblable partie du Diviſeur. 1re Part. ch. 5. art. 6. & ch. 8. art. 4.

17 On rabaiſſe le quotient d'une Diviſion, à proportion qu'on augmente ſon Diviſeur & tout au contraire

18 Pluſieurs nombres également multipliez, ou ſous-multiplez d'autant d'autres nombres, les repreſentent, & ont le même raport entr'eux, que ces derniers. 1re Part. ch. 12. art. 4. ch. 16. art. 2.

19 En toute proportion de quatre termes exprimez en nombres, on compare indifferemment le 1r au 2d, & le 3e au 4e, ou le 1r au 3e & le 2d au 4e. 1re Part. ch. 10. art. 5.

20 Lorſque deux nombres ont même raport entr'eux que deux autres, & les repreſentent, la ſomme ou la difference des deux premiers repreſentent en même-temps celles des deux derniers; & elles ont même raport à chacun de ces deux premiers, que la ſomme ou la difference des deux derniers, à chacun d'eux. 1re Part. ch. 18. art. 7.

21 Dans les proportions compoſées, le raport de l'éxemple de la queſtion, au ſujet propoſé, renferme tous les raports des conditions du premier lieu, à celles du 3e. 1re Part. ch. 12. art. 2.

22 Les aſſociez ou coheritiers doivent être concurrens de la mauvaiſe, comme de la bonne fortune. 1re Part. ch. 4. art. 4.

23 Dans les ſocietez la miſe totale doit avoir même raport au gain ou à la perte totale, que chaque miſe particuliere, à chaque gain ou pertes particulieres : & en même temps les differentes parties de gain ou de perte, doivent être entr'elles en même proportion, que les differentes parties de miſe. 1re Part. ch. 14. art. 4. & ch. 17. art. 7.

24 Dans les ſocietez à temps differens, les raports de gain ou de perte entr'elles, doivent re-

presenter à la fois ceux des parts de mise & de temps de chaque associé entr'eux, & de même pour un plus grand nombre de conditions. 1re Part. ch. 15. art. 4.

25 Deux nombres d'unitez quelconques rangez chacun à part sous une figure de Quarré long & sur des bâses égales, ont même rapport entre eux, que leurs hauteurs. 2e Part. ch. 1. art. 6.

26 Les vîtesses de deux courriers qui font differens espaces de chemin dans un même temps, ont même raport entr'elles, que ces mêmes espaces. 1re Part. ch. 18. art. 4.

27 Les forces de differens agens, qui font un même ouvrage en temps differens ont entr'elles un raport réciproque des temps qu'ils employent chacun à faire ce même ouvrage. 1re Part. ch. 6. art. 2.

Suite de l'errata.

Pag. 139. l. 14. 243.416.729). p. 140. l. 6. progression 729. au plus. p. 144. l. 13. on sçait (par exemple). Si ~~8820~~ den | 9023 en | 4413 | 252 jo. | p. 145. l. 28. sçavoir 59234875: p. 146. l. 3. comme 9654742, l. 33. 1563-31937590. p. 150. l. 24. produiroit 5232,) p. 156. l. 4. commençante à l'unité. p. 180. l. 15. les renvoyer à quelque. p. 192. l. 25. par exemple $\frac{6}{12}$, une. p. 200. l. 7. ($5.6^1.7^2.8^3.9^4$.) p. 201. l. 14. ny de Tables de decimales, ny. p. 224. au bas, 3750 dix milliémes, & 3 dracmes 234 dix milliémes; lesquelles étant ajoutées aux précédentes, & avec 5 livres pesant. font 53984 dix milliémes en tout. Je trouve encore que 2 onces valent 1250 dix milliémes, qui étant ajoûtées aux précédentes, & à 4 liv. pesant, font 41797 dix milliémes en tout: Multipliant donc 53984.

pag. 226. l. 22. ~~1-5-4-2-6~~. p. 232. l. 6. retranchant de la somme le 1r. p. 234. l. 30. doit payer comtant.

TRAITÉ D'ARITHMETIQUE THEORI-PRATIQUE EN DEUX PARTIES.

PREMIERE PARTIE,

Qui contient les Regles les plus utiles.

CHAPITRE PREMIER.

La maniere d'écrire & d'énoncer toutes ſortes de Nombres.

ART. I. L'ARITHMETIQUE eſt la partie des Mathématiques qui traite des Nombres en particulier, & de la maniere dont on s'en ſert dans l'uſage commun. Ses Caractéres ou Chiffres ordinaires ſont ceux-cy.

(1 un) (2 deux) (3 trois) (4 quatre) (5 cinq) (6 ſix) (7 ſept) (8 huit) (9 neuf) (0 zéro ou rien,)

avec leſquels on exprime les Nombres plus grands que 9, en cette maniere. (10 dix) (11 onze) (12 douze,) &c. (20 vingt) (21 vingt & un,) &c. (30 trente) (31 trente & un) (70 ſoixante & dix, ou ſeptante) (80 quatre-vingt, ou huitante) (90 quatre-vingt-dix, ou nonante) (100 cent) (101 cent un,) &c. (1000 mille) 1001 mille un, &c.) (10, 000, dix mille) (100, 000 cent mille) (1, 000, 000 million) 10, 000, 000, dix millions) (100, 000, 000 cent millions) (1, 000, 000, 000 milliar, milliaſſe, mille millions, bilions, ou bimilions, &c.) trilions, ou trimillions, ou millions de millions, ou mille milliars; 4 lions, ou 4 millions; 5 lions, 5 millions, ou milliars de milliars, &c. en augmentant toûjours la valeur d'un chiffre dix fois, à chaque fois qu'on l'avance d'une place de droite à gauche.

II. Il ſuit de cette maniere de nombrer, que le premier chiffre d'un nombre quelconque, comme par exemple de (3, 235, 798, 416,) du côté droit, vaut toujours des unitez ou des entiers, ſçavoir (par exemple) des hommes, ou des livres, ou des jours, &c. ſelon la nature du nombre que l'on exprime; que le ſuivant, 1, vers la gauche vaut toûjours des dixaines; le 3e, 4. dans le même ordre, des centaines; le 4e, 8, des milles; le 5e, 9, des dixaines de mil; le 6e, 7, des centaines de mil; le 7e, 5, des millions; le 8e, 3, des dixaines de millions; le 9e, 2, des centaines de millions; le 10e, 3, des milliars, milliaſſes, bilions, ou bimillions, &c. De plus, que la dénomination ne change que de trois chiffres en trois chiffres, à commencer à droite, ainſi le 1^r^ vaut des unitez; le 4e des mil; le 7e, des millions; le 10e, des milliars, bimillions ou bilions, &c. D'où il ſuit que ſi l'on partage un nombre donné de trois en trois chiffres, en allant

de droite à gauche, tous les chiffres d'une même tranche ſeront d'une même eſpece ; ſçavoir ceux de la 1re tranche à droite des unitez ; ceux de la deuxiéme des milles ; ceux de la troiſiéme des millions ; ceux de la quatriéme des milliars, &c. avec cette difference que le ſecond chiffre de chaque tranche vers la gauche (1, 9, 3,) marque toûjours des dixaines de l'eſpece de cette tranche ; par exemple (9) vaut des dixaines de mil dans la deuxiéme à gauche. (3) vaut des dixaines de millions dans la troiſiéme (235) &c. Le troiſiéme de chaque tranche, ſçavoir icy (4, 7, 2,) vaut toûjours des centaines de l'eſpece de cette tranche ; ſçavoir (4) des centaines d'entiers, (7) des centaines de mil, (2) des centaines de millions, &c. Ainſi un nombre quelconque étant propoſé, comme (par exemple) le precedent (3, 235, 798, 416) ; après l'avoir partagé par tranches chacune de 3 chiffres, en commençant à droite, il ne s'agit pour l'exprimer, que de ſe ſouvenir du nom de chaque tranche, & d'énoncer chaque tranche, comme ſi on n'avoit à nombrer que les ſeuls chiffres qu'elle contient ; & cela en commençant du côté gauche. Ainſi dans l'exemple propoſé, la premiere tranche à gauche, vaut ſimplement 3 milliars, la deuxiéme vaut 235 millions, la troiſiéme vaut 798 milles, & la quatriéme, 416 entiers ou unitez ; & de même pour un plus grand nombre de chiffres, en ſe ſouvenant toûjours de diviſer par tranches le nombre propoſé, en commençant à droite, & de commencer au contraire à l'énoncer par le côté gauche ; ce qu'on peut voir encore dans l'exemple ſuivant (23, 509, 008, 700) dont la premiere tranche à gauche vaut 23 milliars, la 2e 509 millions, la 3e 8 milles, & la 4e (7 cent) ſeulement, & qui s'énonce comme on le voit icy.

III. Tout l'Art de l'Arithmétique conſiſte à faire par parties les calculs qu'on ne ſçauroit faire tout d'un coup en ſa tête. Par ce moyen on parvient à ſuputer les plus grandes ſommes plus facilement, qu'on n'en pourroit compter de fort médiocres, ſans ce ſecours, par la ſeule aide de la mémoire; & avec plus de ſureté. Or les principales & plus ordininaires opérations de l'Arithmétique, ſont les ſix ſuivantes; ſçavoir, l'*Addition*, la *Souſtraction*, la *Multiplication*, la *Diviſion*, & l'*Extraction des racines quarrées & Cubiques*; par le moyen deſquelles toutes les autres s'executent; & même les trois dernieres n'étant qu'un compoſé ou un aſſemblage des trois premieres, on peut dire en quelque façon qu'il n'y a d'operations fondamentales dans l'Arithmétique, que ces trois premieres; mais il ne s'enſuit pas pour cela que quand on ſçait ces trois premieres, on puiſſe de ſoy-même trouver les trois autres, & encore moins toutes celles qui dépendent de ces ſix principales. Car la plûpart de ces Régles compoſées, dépendent encore d'autres principes qu'il faut ſçavoir avant d'y arriver; & il n'y a que la ſeule Diviſion qui ne demande, outre les trois premieres Régles, qu'un peu d'induſtrie pour la trouver.

On ſe ſert encore dans les Monumens publics, & dans les Bureaux, des chiffres Romains (i. v. x. l. c. d. m.) ou [I. V. X. L. C. D. M. ou cIↃ.] dont le premier ſert à exprimer les nombres au deſſous de (5) ainſi (I un) (II deux) (III trois) (IIII 4) Le ſecond ſert à marquer les nombres depuis 4 compris juſqu'à 10, non compris ainſi (IV. 4.) (V. 5.) (VI. 6.) (VII. 7.) (VIII. 8.) (VIIII. 9.) Le 3e les marque depuis 9 compris juſques à 40, non compris, ainſi (IX. 9.) (X. 10.) XI. 11.) (XVIII. 18.) (XIX. 19.) (XX. 20.) (XXXIX. 39.)

Le 4e depuis 40 juſqu'à 100, ainſi (XL. 40.) (LXXIX. 79.) & de même pour toutes les autres, en ſe ſouvenant que c ou C ſignifie cent ; d ou D. 5 cents, ou Ic. (Ɔc, ou ɒc) 600. & m ou M ou encore cIↃ. mille. (IↃↃ. 5000.) (cIↃↃ. 10000) (IↃↃↃ. 50000.) (cccIↃↃↃ. 100000.) De ſorte que toute la premiere ſomme propoſée ci-deſſus, ſçavoir (3, 235, 798, 416,) peut ſe marquer ainſi en Chiffre Romain [III milliars, CCXXXV millions, DCCXCVIII milles, CDXVI] ; mais la longueur de l'expreſſion rend cette maniere preſque inutile & inuſitée, du moins dans les grands calculs.

Quant aux deux dernieres operations de l'Arithmétique, ſçavoir l'Extraction de la racine quarrée, & celle de la racine cubique, comme elles ſervent principalement dans des opérations de Géométrie, où il s'agit de comparer des figures entr'elles, ou de réduire des figures à la quarrée, ou à la cubique, ou enfin de donner une figure affectée à des ſurfaces & à des ſolides ; & dans les méchaniques qui ſuppoſent la Géométrie, j'ay trouvé à propos de les renvoyer, au moins la derniere, à ma Géométrie Théori-pratique. Je ſçai qu'on peut les employer dans des queſtions tirées des progreſſions géométriques ; mais il vaut infiniment mieux réſoudre ces queſtions par les Logaritmes, que l'on trouvera à la fin de cette premiere Partie.

CHAPITRE II.

De l'Addition des Entiers.

1r EXEMPLE.

D	C	B	A
	4	5	5
	6	3	2
3	0	1	3
		2	1
4	1	2	1

I. SOient les Nombres marquez dans ce premier Exemple qu'il faille ajoûter en une ſomme : pour cet effet je les écris d'abord les uns ſous les autres, en telle ſorte que les chiffres de même eſpece ſe trouvent dans un même rang. Ainſi les chiffres (5, 2, 3, 1.) qui valent des entiers, ſont dans la premiere colomne à droite, marquée de la lettre (A.) Les chiffres (5, 3, 1, 2,) qui marquent des dixaines, ſont rangez dans la colonne ſuivante vers la gauche, marquée de la lettre B. les centaines ſont dans la colonne C, les mille dans la colonne D, & de même pour les autres colonnes, s'il y en avoit davantage.

Enſuite j'ajoûte en une ſomme toutes les unitez de la colonne A, ſçavoir (5, 2, 3, 1.) Cette ſomme ſe trouve être (11;) & parce qu'elle ſurpaſſe le nombre (10) de, 1, j'écris ſeulement ce ſurplus 1, au deſſous de cette colonne, ſous une barre; & je retiens la dixaine pour l'ajoûter avec la colonne ſuivante (B,) qui vaut auſſi des dixaines, diſant [une dixaine que je retiens, & 5, dixaines de la colonne B, font 6, avec 3 font 9; & 1 font font 10, & 2 font 12 dixaines.] Et comme cette ſomme ſurpaſſe encore (10) de 2, j'écris ſeulement ce ſurplus (2) ſous cette colonne (B;) ſçavoir ſous la barre, à côté du chiffre 1, reſervant les (10) qui ſont une dixaine de dixaine, ou une centaine pour la colonne précedente C, à laquelle je l'ajoûte, comme pour la co-

lonne B, disant [un cent, ou simplement 1, que je retiens, avec 4 font 5, & 6 font 11, & zéro sont toûjours (11) qui surpassent encore dix de 1; que j'écris sous cette même colonne C; sçavoir toûjours sous la barre à côté du chiffre précedent (2,) retenant encore une dixaine de cent, ou un mille pour l'ajoûter avec les mille de la colonne précedente D. Je finis donc cette Addition en disant [1 que je retiens & 3, font 4,] que j'écris sous la barre à côté de l'1 précedent. Ainsi toute cette colonne ne vaut 4000; & la somme entiere de tous les nombres proposez est celle qui se trouve écrite sous la barre; sçavoir (4121)

2e EXEMPLE.

D	C	B	A
8	9	8	7
	2	5	8
9	9	6	9
	8	5	9
2	0	0	7	3

II. Quand la somme de quelqu'une des colonnes contient seulement des dixaines, sans unitez, comme dans ce second Exemple, dont la troisiéme colonne (9298) marquée (C) vaut seulement 30, on écrit un zéro au dessous, sçavoir sous la barre, pour marquer qu'il n'y a nulles unitez par dessus les 3 dixaines, ou simplement pour occuper cette place, & on réserve ces trois dixaines pour les ajoûter avec la colonne précedente, D, vers la gauche, comme dans le premier Exemple; on en fait de même de cette colonne D, dont la somme est 20, écrivant le zéro de 20 sous la barre, au droit de la colonne, & les deux dixaines à côté du zéro, à cause qu'il n'y a plus de colonnes à ajoûter. Alors la somme de tous les nombres proposez dans ce second exemple, se trouve écrite sous la barre, comme dans le premier; sçavoir (20,073)

3e EXEMPLE

E	D	C	B	A
6	0	9	8	7
		2	5	8
6	0	9	6	9
		8	5	9
1	2	3	0	7	3

III. Quand il ne ſe trouve dans une colonne que des zéros, comme dans la 4e colonne de ce 3e éxemple, il faut ſimplement écrire au deſſous les dixaines qu'on a retenuës du rang précedent vers la droite, qui ſont ici (3) en nombre, & paſſer tout de ſuite à la colonne ſuivante à l'ordinaire, écrivant ſes unitez (2) ſous la barre au droit d'elle, & la dixaine en avançant d'une place; ce qui donnera toûjours pour la ſomme totale de tous les nombres propoſez de cet éxemple, celle qui ſe trouvera écrite ſous la barre; ſçavoir icy (123,073)

4e EXEMPLE.

9	3	7	8	9
	8	0	5	6
		3	8	7
			7	0
1	0	2	3	0	2

On peut s'exercer encore ſur ce 4e éxemple qui renferme les trois précedents, & ſur tant d'autres pris à plaiſir qu'on voudra, dans leſquels on ne trouvera pas plus de difficulté que dans ceux-cy.

5e EXEMPLE.

D	C	B	A
1	3	0	9
			7
	9	8	6
8	0	0	8
		9	7
	8	0	0
		7	8
	9	8	7
6	7	8	9
9	7	8	6
2	8	8	4	7

IIII Quand le nombre des ſommes propoſées à ajoûter en une, eſt trop grand, on les écrit toûjours les unes ſous les autres, comme cy-devant; enſuite dequoi on partage les colonnes par parties; ſçavoir en 2, 3, &c. comme on le voit dans ce 5e éxemple, dont la premiere colonne à droite marquée A, vaut (114.) Ainſi il faudroit naturellement écrire le 4 ſous la premiere colonne marquée A, & ajoûter les 11 dixaines de reſte,

2	8	8	4	7
		4	5	7
			9	0
		4	0	9
	8	0	9	0
		7	4	8
	5	0	0	0
			9	8
		7	8	9
	9	8	7	6
5	4	4	0	4

avec la colonne ſuivante marquée B, diſant [11 que je retiens, & 8 font 19, &c.] Mais comme ceux qui n'ont pas l'habitude du calcul ſe trompent aſſez ſouvent dans les operations un peu longues & compoſées, il vaut mieux couper toutes ces colonnes en parties égales, enſorte que chacune ne ſoit compoſée que de dix ou douze ſommes au plus ; enſuite faire une ſomme des premieres colonnes ; ſçavoir 28847, & l'écrire au deſſous à l'ordinaire, obſervant bien l'ordre des places ; & enfin ajoûter cette ſomme totale (28847,) avec les colonnes ſuivantes, ſous une barre ; alors on aura la ſomme totale de toutes les propoſées, qu ſe trouve ici. (54404.)

Preuve de l'Addition.

6e EXEMPLE

3	7	8	9	
	2	0	5	
		1	8	
	7	0	0	4
3	7	8	9	0
		8	5	3
4	9	7	5	9
4	9	7	5	9

V. Ceux qui ne calculent pas ſouvent n'étant que trop ſujets à ſe tromper, doivent neceſſairement, pour s'aſſurer de leur calcul, faire d'abord leur addition toute d'un même ſens, c'eſt-à-dire (par exemple) du haut des colonnes en bas, & recommencer une ſeconde fois l'addition du ſens contraire, ſçavoir de bas en haut : car il eſt évident que ſi l'on tronve la même ſomme totale toutes les deux fois, c'eſt une marque que l'on ne s'eſt point trompé : c'eſt ce qu'on peut voir dans ce 6e Exemple, où les deux ſommes totales trouvées en deux ſens oppoſez, ſont parfaitement égales.

On donne d'autres preuves de l'Addition ; mais

comme elles ſont ſujettes à erreur, je ne m'y arrêterai pas.

Théorie.

VI. Il n'eſt pas neceſſaire de beaucoup de raiſonnement pour faire voir que la méthode que l'on vient de donner, pour ajoûter pluſieurs ſommes en une eſt très-commode; puiſqu'il eſt évident qu'on peut par ſon moyen ajoûter enſemble tant de ſommes qu'on voudra, & quelques grandes qu'elles ſoient, dans un temps aſſez court, ſans beaucoup de travail de mémoire, & ſans pouvoir preſque ſe tromper. On ne peut pas douter non plus de la juſteſſe de la méthode, puiſqu'elle ne propoſe autre choſe, que d'ajoûter les unitez enſemble, les centaines avec les centaines, les mil avec les mil, &c. & que tout nombre propoſé ne contient rien autre choſe que ſes unitez, ſes dixaines, ſes centaines, ſes mil, &c. C'eſt pourquoi quand on a la ſomme des unitez, des dixaines, des centaines, des mil, &c. de toutes les ſommes propoſées, on doit être aſſuré que l'on en a la veritable ſomme totale.

CHAPITRE III.

De la Soustraction des Entiers.

1re EXEMPLE.

A 7 9 0, 6 5 3
B 4 0 0, 6 3 2
C 3 9 0, 0 2 1

SOit la ſomme propoſée A dans le 1r Exemple dont il faille retrancher une autre ſomme quelconque moindre, B. Pour cet effet j'écris la 2e ſous 1re, ſçavoir les unitez (2) de l'une ſous les unitez (3) de l'autre; les dixaines 3 ſous les dixaines 5; les centaines ſous les centaines

dans le même ordre que dans l'addition. Je commence ensuite par la droite à ôter deux unitez des 3, qui sont au-dessus, disant [de 3 j'ôte 2, le reste est 1] que j'écris dans le même rang sous une barre. Passant ensuite au rang suivant vers la gauche, je dis, de cinq dixaines j'ôte trois dixaines, ou simplement [de 5 j'ôte 3, le reste est 2] que j'écris encore au droit de ce rang, sous la barre à côté du 1r reste. J'ôte ensuite 6 de 6, le reste est zéro, que j'écris au droit de ce rang sous la même barre à côté du reste précedent 2, j'ôte encore zéro, de zéro le reste est zéro que j'écris dessous. J'ôte aussi zéro de 9, le reste est 9 que j'écris dessous. Enfin j'ôte 4 de 7, le reste est 3, que j'écris encore au dessous à côté des premiers restes. Alors le reste total desiré est celui qu'on trouve sous la barre, sçavoir dans ce premier Exemple (390,021) marqué de la lettre C.

2d EXEMPLE.

9	8	0,	0	3	2
	9	0,	6	4	7
8	8	9	3	8	5

II. Il arrive souvent que la plûpart des chiffres de la somme à retrancher (excepté le 1r) sont plus grands que ceux de la somme proposée, comme on le voit dans ce 2d exemple, où il s'agit de retrancher le nombre 90647 de 980032 ; alors ayant écrit la moindre somme sous la plus grande à l'ordinaire, je commence, en disant [7 de 2, on ne peut.] C'est pourquoi j'emprunte une dixaine sur les chiffres précedens (qui sont toûjours plus que suffisans,) laquelle dixaine, avec ce 2, fait 12. Je dis donc [de 12 j'ôte 7, le reste est 5] que j'écris sous une barre au droit de ce rang, comme dans le 1r exemple ; & à cause de la dixaine empruntée, je retiens 1, que j'ajoûte au chiffre suivant 4, de la somme à ôter, (par regle generale) & la somme est

(5,) qu'il faut ôter du chiffre 3 qui eſt au deſſus; & comme cela ne ſe peut, j'emprunte encore une dixaine ſur les chiffres précedens, laquelle avec ce 3 fait 13. Je dis donc [5 de 13, le reſte eſt 8] que j'écris ſous la barre au droit du 4; & je retiens 1, à cauſe de l'emprunt. Je dis enſuite [1 que je retiens, avec le 6 de la ſomme à ôter font 7, de zéro on ne peut:] c'eſt pourquoi empruntant toûjours 10, je dis, [7 de 10,] le reſte eſt 3, que j'écris encore au deſſous, & je retiens 1, qui avec le zéro ſuivant fait toûjours 1, je dis donc [1 de zéro qui eſt au deſſus, on ne peut.] C'eſt pourquoi je dis encore [1 de 10] le reſte eſt 9, que j'écris toûjours au deſſous, & je retiens 1, (à cauſe de l'emprunt.) Je dis donc [1 & 9 font 10; 10 de 18 qui ſont au deſſus, le reſte eſt 8] que j'écris deſſous. Enfin je dis, [1 que je retiens (à cauſe de l'emprunt) de 9 qui précede, le reſte eſt 8] que j'écris encore ſous le 9, à côté des premiers reſtes; & tous ces reſtes particuliers qui ſont ſous la barre, compoſent le reſte total deſiré, ſçavoir (889,385.)

3e EXEMPLE.

3	0	4	0	5	0	6	0
2	9,	8	9	8,	9	8	9
	5	0	6,	0	7	1	

4e EXEMPLE.

1,	0	0	0	0,	0	0	0
	9	9	9,	9	8	7	
	ϕ	ϕ	ϕ,	ϕ	1	3	

On fera de même lorſqu'il y aura un plus grand nombre de zéros, ou que même tous les chiffres de la ſomme propoſée ſeront des zéros, excepté le 1r, comme on peut l'éprouver ſur ce 3e & 4e éxemples, & ſur tous ceux qu'on voudra ſe propoſer à plaiſir, qui ſont tous contenus dans le 2d ci-deſſus; c'eſt pourquoi on n'y doit trouver aucune difficulté, dès qu'on ſçaura bien pratiquer ce ſecond éxemple.

3e *Exemple.*

3 2 7 0
7 8 9
6 5 4 3
1 0 6 0 2
9 9 9 9
6 0 3

III. Lorſqu'il faut déduire une ſomme de pluſieurs propoſées, comme (par exemple) la ſomme (9999) des trois autres, qu'on trouve dans l'éxemple cy-joint, il eſt évident qu'il ne faudra que faire d'abord une ſomme totale de ces 3 qui eſt icy (10602,) & en retrancher la propoſée (9999) pour avoir le reſte 603, ſelon les regles precedentes: ce qui eſt ſi aiſé, que ce ſeroit temps perdu de s'y arrêter davantage.

Preuve de la Souſtraction.

1 0 0 0 0 0 0
9 9 9, 9 8 7
1 3
2 ϕ ϕ ϕ, ϕ ϕ ϕ

IV. La preuve de la Souſtraction ſe fait aiſément & naturellement par l'Addition; car il eſt bien évident que ſi ayant ôté la ſomme (999,987) de (1000,000) du 4e Exemple ci-devant, le reſte que l'on cherche, eſt veritablement (13) comme il eſt marqué, il faut auſſi qu'ajoûtant ce même reſte (13) avec la ſomme ôtée (999,987) on retrouve la ſomme totale propoſée (1000,000;) ce qu'un plus long diſcours n'éclairciroit pas davantage.

Théorie de la Souſtraction.

A B
9 9 9 9 9
1 0 0 0 0 0 0
9 9 9 9 8 7
1 3

V. Tout ce que nous avons dit dans la Théorie de l'Addition, peut s'appliquer ici à la Souſtraction, par rapport au 1r éxemple principalement. A l'égard du ſecond, 3e & 4e

qui renferment des emprunts, il faut conſiderer que l'opération la plus naturelle de les réſoudre, ſeroit (par exemple) dans le 4e ci-joint, d'emprunter 1 ſur la 1re dixaine A, à gauche, & d'écrire le reſte 9, au deſſus; de joindre cette unité avec le ſecond zéro B, pour en faire une 2e dixaine, d'emprunter encore 1 deſſus, & d'écrire le reſte 9 au deſſus; & de même juſqu'au dernier zéro; auquel joignant la derniere unité empruntée pour former 10, il ne reſteroit que d'ôter (7) de cette dixaine, comme nous avons fait, enſuite 8 du 9, qui eſt au deſſus, & d'écrire le reſte 1 3 deſſous. Mais cette opération s'abrege beaucoup par la méthode que nous avons donnée, qui n'eſt pas moins évidente. Car il eſt certain qu'ayant ôté le 7 de 10 dans l'une comme dans l'autre, & écrit le reſte (3) ſous le (7,) on doit trouver le même reſte 1, ſoit qu'on ôte le 8 ſuivant du 9, qui eſt au deſſus, ſoit qu'on augmente ce 8 de l'1 emprunté, pour ôter leur ſomme (9) de la dixaine qui eſt au deſſus du 8, de laquelle dixaine on a emprunté cet 1, pour avoir le reſte (9.)

2	9	3	9	4	9	5	
7	φ	4	φ	5	φ	6	0
2	9	8	9	8	9	8	9
	5	0	6	0	7	1	

Dans le 3e éxemple ci joint il faudroit dire naturellement, [de 6 j'emprunte 1, il reſte 5] que j'écris deſſus; enſuite [de 10 j'ôte 9, le reſte eſt 1; enſuite emprunter 1 ſur le 5 précedent, & écrire le reſte 4, au deſſus; joindre cet emprunt au zéro ſuivant pour faire 10; prendre 1 ſur ces 10, & écrire le reſte 9 deſſus; joindre cet (1) emprunté, avec le (5) ſuivant & dire [de 15, j'ôte 8, le reſte eſt 7;] enſuite [de 9, j'ôte 9, le reſte eſt zéro;] & emprunter encore 1 ſur le 4 de la 6e place, pour ajoûter une dixaine au 4 reſtant écrit ſur le 5, & continuer ainſi ces emprunts, tant qu'il

ſeroit neceſſaire ; ce qui ne laiſſe pas d'être long & embaraſſant. Or il eſt évident qu'on ſe délivre de cet embarras, en ôtant 9 de 10, écrivant le reſte 1 deſſous, ſans s'embarraſſer où ſe prend cette dixaine, (les chiffres précedens étant toûjours plus que ſuffiſans pour la fournir) augmentant enſuite le 8, à ôter de cet 1 emprunté, & ôtant leur ſomme 9 du chiffre ſuperieur 6 tout entier, d'où cet emprunt avoit été tiré; en l'augmentant, s'il eſt neceſſaire, encore d'une dixaine, qui ſe prend toûjours ſur les chiffres précedens; ce qui doit toûjours donner le même reſte 7, comme il eſt évident.

CHAPITRE IIII.

De la Multiplication des Entiers.

1. MUltiplier un nombre par un autre, c'eſt prendre le 1r autant de fois que le 2d contient d'unitez. Multiplier (par exemple) 8 par 5, c'eſt prendre 8 cinq fois, ou autant de fois que 5 contient d'unitez. Les régles que nous allons donner ſuppoſent que l'on ſçache multiplier par cœur les nombres Elementaires entr'eux, c'eſt-à-dire depuis 9 par 2, juſqu'à 9 par 9. Et comme il y a beaucoup de perſonnes qui n'ont pas acquis cette habitude, nous propoſerons ici une petite Table triangulaire, où l'on trouvera ces Multiplications toutes faites, & dans laquelle, par conſequent, on pourra les apprendre aiſément.

Pour y parvenir, il faut prendre un nombre à plaiſir dans la colonne AC, (par exemple) 5, avec le nombre 2, qui eſt au commencement de la colonne GH, & multiplier l'un par l'autre en deux manieres à la fois, en diſant [cinq fois 2, ou deux fois 5 font 10,] qui eſt leur produit, lequel ſe

trouve en ſuivant la rangée horizontale ou tranſverſale EF, qui paſſe par 5, & en même-temps la colonne verticale GH, qui paſſe par 2, & s'arrêtant à la cellule ou caſe, où ces deux colonnes ſe rencontrent. Il faut continuer enſuite de multiplier le même 5 par le 3 qui ſuit le 2, & le 3 par le 5, prenant leur produit 15 dans la rencontre des deux rangées qui paſſent par 5 & par 3; & ſe ſouvenant de multiplier toûjours doublement, c'eſt-à-dire, de dire [cinq fois 3 ou trois fois 5 font 15.] On dira enſuite [cinq fois 4 ou quatre fois 5 font 20, & cinq fois 5 font 25;] leſquels produits 20 & 25 ſe trouveront toûjours dans la rencontre des rangées qui paſſent par les deux Multiplicateurs. Lorſqu'on eſt parvenu à multiplier le nombre choiſi par lui-même, comme 5 par 5, il faut en demeurer là, & prendre le nombre ſuivant, ſçavoir 6 dans notre éxemple pour le multiplier de même par tous les mêmes nombres inferieurs, 2, 3, 4, 5, 6; prenant toûjours les produits dans les rencontres des colonnes; & de même de tous les autres nombres de la colonne AC, juſqu'au plus grand 9; & ſe ſouvenant toûjours de multiplier doublement. Par ce moyen on parviendra dans peu de jours à ſçavoir multiplier les nombres élementaires; ſans quoi il eſt impoſſible d'arriver à multiplier aucune ſomme un peu conſiderable. C'eſt pourquoi il faut que les commençans ſe la rendent fort familiere, afin d'être ſoulagez de la fatigue continuelle que la Multiplication leur cauſeroit ſans elle, & auſſi pour opérer avec plus de ſureté.

TABLE

TABLE POUR LA MULTIPLICATION & Diviſion Elémentaires, appellée vulgairement LIVRET.

	A	G							
	1	2							
	2	4	3						
	3	6	9	4					
	4	8	12	16	5	F			
E	5	10	15	20	25	6			
	6	12	18	24	30	36	7		
	7	14	21	28	35	42	49	8	
	8	16	24	32	40	48	56	64	9
	9	18	27	36	45	54	63	72	81
		C	H						

On peut paſſer les produits barrez, comme étant ordinairement connus des Commençans.

1r EXEMPLE

4 6 7
2 5
---
2 3 3 5
9 3 4
---
1 1 6 7 5

II. Soit donc preſentement le nombre quelconque (467) qu'il faille multiplier par le nombre propoſé 25; c'eſt-à-dire qu'il s'agit de trouver combien font 25 fois (467.) Pour y parvenir on écrit ordinairement le Multiplicateur 25 ſous la ſomme à multiplier 467 (que quelques-uns appellent auſſi Multiplende) dans l'ordre naturel; ſçavoir les unitez ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, &c. On multiplie enſuite chaque chiffre du Multiplende (467) l'un après l'autre, en commençant à droite par le 1r chiffre 5 du Multiplicateur pris du même

côté ; disant [5 fois 7 font 35,] dont on écrit seulement le 5 sous une barre dans le même rang, en retenant les 3 dixaines comme dans l'Addition. On continuë, disant [5 fois 6 font 30 dixaines ou simplement 30, & 3 dixaines que je retiens, la somme est 33,] dont on écrit seulement les 3 unitez dans le 2d rang sous le 6, & le 2 à côté du 5, & on retient encore ces trois dixaines de dixaines ou centaines. Enfin on dit [5 fois 400 font 20 cens ;] ou simplement [5 fois 4 font 20, qui avec les 3 cents de retenus, font 23.] On écrit donc encore le surplus 3, des dixaines de cent dans le rang des 100, à côté du 3 précedent. Et comme il n'y a pas davantage de chiffres à multiplier dans le Multipliende, on écrit le 2 devant ce dernier 3 : ce qui donne (2335) pour le produit de (467,) par 5 ; c'est-à-dire que 5 fois 467 font (2335.) De sorte que si au lieu du Multiplicateur 25, on avoit seulement 5, la Multiplication seroit achevée, & le produit desiré seroit (2335.) Mais comme le Multiplicateur est 25, & non pas seulement 5, ayant multiplié 467 par 5, il faut encore le multiplier par 20 ; c'est-à-dire par le 2 qui précede 5. On fait donc une 2e operation, disant [2 fois 7 font 14,] dont on écrit seulement le 4 sous le Multiplicateur (2) par régle generale, & on retient la dixaine. On continuë, disant [2 fois 6 font 12 dixaines, ou simplement 12, & 1 que je retiens, la somme est 13,] dont j'écris seulement le 3 à côté du 4, en avançant vers la gauche ; enfin on acheve, en disant [2 fois 4 font 8, cents, ou simplement 8, & 1 que je retiens, la somme est 9] que j'écris à côté du 3 en l'avançant ; ce qui me donne pour le produit de (467.) par 20, ou par 2, (9340,) ou simplement (934,) avancé d'une place vers la gauche.

Il ne reſte donc plus pour avoir le produit total deſiré de 467 par 25, que d'ajoûter en une ſomme ces deux produits particuliers, dans l'ordre où ils ſe trouvent; ce qui ſe fera comme dans l'Addition des entiers; & l'on trouvera (11,675) pour produit total.

2d EXEMPLE.

		5	1	3	0
		2	1	4	0	0
	2	0	5	2	
	5	1	3		
1	0	2	6		
1	0	9.	7	8	2.	0	0	0

III. Quand il y a des zéros à la fin de la Somme à multiplier, ou du Multiplicateur, ou de tous les 2, on écrits toûjours le dernier chiffre du Multiplicateur ſous le dernier du Multipliende, comme s'il n'y avoit point de zéros, laiſſant les zéros à l'écart; (on peut même les en ſeparer par une barre, afin de s'en délivrer tout à fait,) & l'on continuë l'operation, comme s'il n'y en avoit point du tout. Ainſi dans ce 2d éxemple, où l'on propoſe (5130) à multiplier par (21,400) ayant retranché les 3 zéros, comme on vient de le dire, l'on multiplie ſeulement (513) par (214,) comme dans le 1r éxemple, c'eſt-à-dire premierement, (513) par (4,) ce qui donne pour produit (2052;) enſuite (513) par 1, ce qui donne 513 pour produit, dont on écrit le dernier chiffre 3 ſous le Multiplicateur 1; & enfin (513) par 2, dont le produit eſt (1026,) que l'on écrit comme ci-deſſus, faiſant enſuite une ſomme de ces 3 produits particuliers, on trouve pour produit total (109,782,) après lequel il ne faut pas manquer d'écrire tous les zéros des deux ſommes propoſées; ſçavoir ici 3 zéros; ce qui donne enfin pour le produit total deſiré (109,782,000.)

3e EXEMPLE.

	5 0 3 0
	2 1 4 0 0 0
2 0 1 2	
5 0 3	
1 0 0 6	
1.0 7 6.4 2 0.0 0 0	

I V. Lorſqu'il ſe trouve quelques zéros entre les chiffres de la ſomme à multiplier, comme dans ce 3e exemple, où l'on propoſe (5030) à multiplier par (214,000;) ayant écrit les zéros à l'écart, on multiplie le (3) qui précéde le zéro par le premier chiffre (4) du Multiplicateur; ce qui donne 12; & ayant écrit le ſurplus des dixaines, ſçavoir (2) ſous le (4) à l'ordinaire, on écrit la dixaine (1) à côté de ce (2;) à cauſe que quatre fois zéro ne produiſent rien. Enſuite de quoi on pourſuit l'operation à l'ordinaire; diſant [4 fois 5 font 20,] dont on écrit le zéro à côté du produit 1, & le (2) en avançant; ce qui donne pour le produit de (503) par (4) le nombre (2012.) On paſſe enſuite aux autres multiplicateurs 1 & 2, comme dans les éxemples precedens, diſant [1 fois trois font 3] qu'on écrit toûjours ſous le Multiplicateur 1; enſuite [une fois zéro font zéro] qu'on écrit à côté de ce 3, pour remplir cette place; & enfin [une fois 5 font 5] qu'on écrit devant ce zéro, & de même pour le multiplicateur 2, & pour tous les autres, s'il y en avoit davantage; & les trois produits particuliers étant ajoûtez à l'ordinaire, avec tous les zéros à la fin, comme on l'a dit dans l'article précedent, on a pour le produit total demandé, (1,076,420,000.)

4e EZEMPLE.

```
      5 0 3 0
      2 0 4 0 0
  ---------------
    2 0 1 2
1 0 0 6 0
  ---------------
1 0 2, 6 1 2, 0 0 0
```

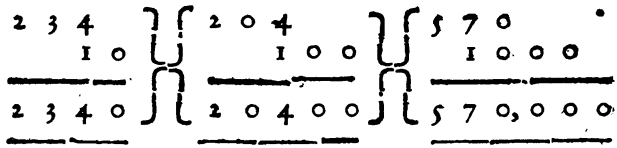
V. Enfin, lorſqu'il ſe trouve quelque zéro entre les chiffres du Multiplicateur, comme dans ce 4e éxemple, où il s'agit de multiplier (5030) par (20400,) ayant écrit les ſommes comme dans le 2d éxemple ; c'eſt-à-dire toûjours les zéros à l'écart, ayant enſuite multiplié la ſomme reſtante (503) par le 1r chiffre du Multipliant (4,) & écrit le produit (2012) au deſſous à l'ordinaire, on paſſe au zéro du Multiplicateur, dont le produit eſt zéro qu'on écrit deſſous, ſelon la régle generale, & cette opération eſt achevée ; ainſi il ne reſte plus que de continuer à l'ordinaire de multiplier (503) par le multiplicateur reſtant (2,) & d'écrire le premier chiffre 6 de ſon produit au deſſous de 2 ; & enfin d'ajoûter ces 3 produits en une ſomme ; ce qui donne pour le produit total déſiré, (102,612,000.)

5e EXEMPLE.

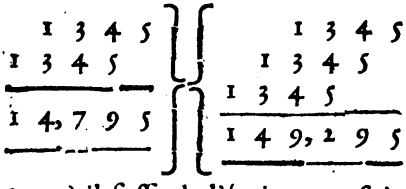
```
        9 0 7 8 9 0
          5 8 0 8 0 0
  ---------------------
      7 2 6 3 1 2
  7 2 6 3 1 2 0
4 5 3 9 4 5
  ---------------------
5 2 7, 3 0 2, 5 1 2, 0 0 0
```

Après ces 4 éxemples, il ne doit reſter aucune difficulté ſur tous les autres poſſibles, comme on peut le voir dans ce 5e éxemple, qui n'eſt plus difficile que les précedens, que parce qu'il eſt plus long, & peut-être parce qu'il les comprend tous.

VI. On pourra tirer encore quelque utilité des remarques ſuivantes.



1. Lorſqu'il s'agit de multiplier quelque nombre, comme (234) par (10,) il ne faut que lui ajoûter un zéro, & le produit eſt (2340.) S'il faut multiplier une ſomme comme (204) par (100;) ajoûtant 2 zéros, le produit eſt (20400.) De même s'il falloit multiplier la ſomme (570) par (1000,) ajoûtant 3 zéros, on auroit pour produit (570,000,) & ainſi de toutes les autres.



2. S'il faut multiplier un nombre quelconque, comme par exemple (1345) par (11,) il ſuffit de l'écrire une fois ſous lui-même, en l'avançant d'une place à gauche ou à droite, & de faire une ſomme totale de ces deux nombres ainſi rangez, elle ſera le produit déſiré; ſçavoir, (14,795:) s'il faut multiplier par (111,) on écrira le nombre propoſé deux fois tout de ſuite ſous lui-même, en avançant d'une place à chaque fois à droite ou à gauche, & l'on fera une ſomme totale de ces trois nombres; ſçavoir, ici (149,295) qui ſera le produit ſouhaité, & de même pour les autres multiplicateurs (1111) (11111,) &c.

50970	50970
101940	152910
611,640	662,610

III. Lorſqu'il s'agit de multiplier quelque ſomme comme par exemple (50,970.) par (12,) on ne fait qu'écrire le double de la ſomme; ſçavoir (101940) ſous elle-même, en avançant ce double d'une place à droite, & l'on fait enſuite des 2 à l'ordinaire une ſomme totale (611640,) qui eſt le produit déſiré. De même pour multiplier par (13,) on écrit le triple de la ſomme ſous elle-même, en l'avançant encore d'une place à droite, & l'on fait une ſomme totale des 2, comme cy-deſſus; ſçavoir, ici (662,610) qui eſt encore le produit déſiré, & de même pour tous les autres nombres au deſſous de 20.

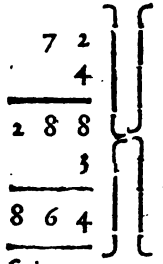
72, le double,	144.
12, la moitié...	6.
...	864

4. Enfin on abrege ſouvent encore une Multiplication, en prenant la moitié, le tiers, ou le quart, &c. d'une des deux ſommes propoſées, & en même-temps le double, le triple, ou le quadruple, &c. de l'autre ſomme, comme on le voit en cet exemple, où il s'agit de multiplier (72) par (12;) car prenant la moitié de 12, & le double de 72; ſçavoir (6) & (144, & multipliant l'un par l'autre, on a par une ſeule operation le même produit 864, qu'on n'auroit trouvé qu'après 2, ou 3.

72, le quart, ...	18
24, le quadruple,	100.
...	1800

Dans ce préparatif on tente, autant que cela ſe peut ſans calcul, de réduire une des deux ſommes à un ſeul chiffre, ou à 10, ou 100, 1000, &c. com-

me on le voit dans ce 2d éxemple, où il s'agit de multiplier 72 par 25; au lieu dequoi on multiplie le quart de 72; sçavoir 18 par le quadruple de 25, qui est 100; ce qui s'acheve tout d'un coup, en ajoûtant les deux zéros de 100, à 18, pour avoir 1800, suivant la 1re partie de cet article, & ainsi des autres.



72	72
4	25
288	360
3	5
864	1800

5. On ne doit pas encore passer sous silence un abbregé qui se pratique fort souvent, lorsque le Multiplicateur a des parties aliquotes simples, comme si l'on a 72 à multiplier par 12, qui est 3 fois 4, on multiplie d'abord 72 par 4; ce que donne 288, que l'on multiplie ensuite par 3; & le produit desiré est 864. De même pour multiplier 72 par 25, qui est 5 fois 5, on le multiplie d'abord par 5; ce qui donne 360, que l'on multiplie encore par 5, & le produit proposé est 1800: le tout comme dans l'article precedent.

Preuve de la Multiplication.

5e EXEMPLE *répeté.*

580800
907890
52272
46464
40656
522720
527,302,512,000

VII. Il n'y a pas de preuve de la multiplication plus naturelle, que de faire servir la Somme à multiplier le Multiplicateur, & le Multiplicateur de Somme à

multiplier, ainsi (par exemple) dans le 5e éxemple ci-devant, si l'on prend le Multiplicateur (580,800) pour Multipliende, & la Somme à multiplier (907,890) pour Multiplicateur, & qu'on fasse une 2e Multiplication à l'ordinaire, on trouvera encore le même produit total qu'on a trouvé la premiere fois, si l'on a bien operé toutes les deux. On indiquera dans la 2e Partie une preuve par 9, & une nouvelle par 11, qui se verifient l'une l'autre, & demandent moins de temps que celle-ci, mais qui sont plus curieuses qu'utiles.

Théorie de la Multiplication.

VIII. Il faut premierement faire ici les mêmes remarques touchant la commodité de cette operation, que sur les deux precedentes, & par les mêmes raisons.

Secondement à l'égard de sa justesse, on n'en sçauroit non plus douter : car pour nous servir du 1r éxemple, il est évident que le Multiplicateur 25, n'est autre chose que la somme de ses 5 unitez, & de ses 2 dixaines. Si l'on prend donc le Multipliende (467) d'abord 5 fois pour ces 5 unitez, & ensuite 20 fois pour ces 2 dixaines, & qu'on fasse une somme de ces deux produits, il est évident qu'on aura le produit total desiré. Or c'est ce qu'on a fait en écrivant le 2d produit sous le 1r, mais plus avancé d'une place vers la gauche, afin que son 1r chiffre 4 à droite vaille des dixaines; (comme il le doit) & ajoûtant les 2 produits en une somme.

A l'égard du 2d éxemple, il est évident que si l'on n'avoit que (513) à multiplier par (214,) le produit desiré seroit (109,782,) mais comme

le Multipliende propoſé eſt plus grand dix fois que (513,) il eſt évident que le produit de (5130,) par (214) doit être augmenté dix fois à proportion; ce qui ſe fait en lui ajoûtant un zéro, ainſi (1,097,820.) De même le produit de (5130) par (21,400) doit être cent fois plus grand que par 214 ſeulement, à cauſe que (21,400) eſt plus grand 100 fois que (214;) il faut donc encore ajoûter les deux zéros de (21400) au produit (1097,820) ci-deſſus; ainſi le premier produit (109,782) aura les trois zéros, tant de la ſomme à muliplier, que du Multiplicateur, puiſqu'il doit croître ou diminuer, nonſeulement à raiſon du Multipliende, mais encore à raiſon du Multiplicateur.

La raiſon du troiſiéme éxemple ſe voit aſſez par elle-même. A l'égard de celle du 4e, il faut conſiderer qu'on n'écrit pour produit zéro) ſous le multiplicateur zéro, qu'afin que le 1r chiffre 6 du produit ſuivant ſe trouve avancé d'une place, & comme naturellement rangé ſous ſon produiſant (2) ce qui eſt generalement neceſſaire: car dans le 2d éxemple, (par exemple) le produit de (513) par l'1 de 214, doit être dix fois plus grand, que ſi ſon produiſant (1) étoit dans la 1re place à droite, & ne valoit que des unitez. Or c'eſt ce que l'on fait en avançant autant le produit de cet 1; ſçavoir (513) vers la gauche, que cet (1) eſt lui-même avancé de ce côté; car par ce moyen le 1r chiffre 3 de ce produit vaut 3 dixaines, & non pas 3 unitez, étant dans le rang des dixaines; le 2d chiffre 1 du même produit vaut des centaines, & non pas des dixaines, étant dans le rang des centaines, & le 3e (5) vaut des milles, & non pas des centaines, étant dans le rang des 1000. De même le produit de (513) par (2) doit valoir 100 fois plus, que ſi ce 2 étoit dans la place du 4, ou dix

fois plus que s'il étoit dans la place de l'1, puiſque ce 2 vaut des centaines, & non pas des unitez, ni des dixaines. Or c'eſt ce qu'on fait, en avançant ſon produit (1026) encore d'une place vers la gauche; car par ce moyen ſon premier chiffre 6 vaut 6 cent, & non pas 6 unitez, ni 6 dixaines, étant dans le rang des centaines, ainſi des autres chiffres à proportion. Or il eſt bien évident qu'en écrivant d'abord le dernier chiffre à droite (2) du 1^r produit (2052) ſous le dernier (4) du multiplicateur (214,) & avançant enſuite d'une place chacun des derniers chiffres 3 & 6 des autres produits (513) (1026,) ces derniers chiffres 3 & 6, doivent ſe trouver de même ſous leurs produiſans (1) & (2;) & de même ſi le Multiplicateur contenoit un plus grand nombre de chiffres.

A l'égard des remarques du 6e article, il eſt évident que de multiplier un nombre par 10, ou par 100, ou par 1000, ce n'eſt autre choſe que le faire valoir 10 fois, ou 100 fois, ou 1000 fois plus qu'il ne valoit. Or en y ajoûtant un zéro à la fin, ſon dernier chiffre 4 (par exemple) qui ne valoit que des unitez, vaut alors des dixaines: le ſecond 3, qui ne valoit que des dixaines, vaut des centaines; & le 3e qui ne valoit que des centaines, vaut des 1000: Ainſi chacun de ſes chiffres étant augmenté dix fois, on ne peut douter que la ſomme entiere (234) ne vaille auſſi dix fois plus que ſans ce zéro. De même quand on ajoûte 2 zéros, on fait valoir chaque chiffre de la ſomme à multiplier 100 fois plus qu'il ne valoit. Donc cette même ſomme entiere eſt augmentée elle-même cent fois. Quand on en ajoûte 3, on augmente chaque chiffre du Multipliende 1000 fois; ainſi tout le Multipliende eſt multiplié par 1000, & de même pour un plus grand nombre de zéros.

Quant à la Multiplication par des nombres, dont tous les chiffres ſont des unitez, elle ſe connoît tout d'un coup en faiſant l'operation tout au long, & la comparant avec la regle que nous donnons. Celle que nous donnons pour les nombres au deſſous de (20,) n'eſt guéres plus difficile : car lorſqu'on multiplie un nombre comme (50970) par 12, (par éxemple) on double d'abord (50970,) & on êcrit enſuite le même nombre (50970) tout ſimple deſſous, mais d'une place plus avancée vers la gauche. Or nôtre méthode donne la même choſe, quoique dans un ordre contraire : ce qui eſt indifferent, comme il eſt manifeſte.

Enfin pour ce qui regarde la 4e abreviation, rien n'eſt plus naturel, lorſqu'on ne prend que la moitié ou le tiers du Multipliende, que de prendre en recompenſe le double ou le triple du Multiplicateur, ſi l'on veut avoir le même produit, qu'on auroit trouvé par l'operation naturelle ; puiſque par ce moyen, autant que le rabaiſſement du Multipliende rabaiſſe le produit deſiré, autant l'augmentation du Multiplicateur le rehauſſe ; ce qui le réduit toûjours à la même valeur.

A l'égard de la preuve de la Multiplication, elle eſt fondée ſur ce que 3 fois 2, (par éxemple) ou 2 fois 3, font le même produit, ſçavoir 6. Or ceci eſt manifeſte par le raiſonnement precedent ; car dans le 1r cas (2) eſt le Multipliende, & (3) le Multipliant ; & dans le ſecond (3) eſt le Multipliende & (2) le Multiplicateur. Donc le Multipliende du 2d cas eſt plus grand de ſon tiers que celui du 1r ; mais en recompenſe auſſi, le Multiplicateurdu 1r cas eſt plus grand auſſi de ſon tiers que celui du 2d. Donc il y a compenſation entre ces 2 produits : c'eſt pourquoi ils ne peuvent manquer d'être égaux ; c'eſt ce que tout le monde ſçait par

experience & croit entendre, mais dont peu de personnes, peut-être, ſçavent la veritable raiſon.

CHAPITRE V.

De la Diviſion des Entiers.

ART. I. DIviſer un nombre comme 72 par quelque autre, comme par 12, c'eſt chercher combien de fois le Diviſeur (12) eſt contenu dans le Dividende (72;) & trouver en même-temps le ſurplus, s'il n'y eſt pas contenu exactement. Le nombre qui exprime combien de fois le Diviſeur eſt contenu dans le Dividende, s'appelle le Quotient, auſſi-bien que le trait dans lequel l'on l'enferme.

La Diviſion, auſſi-bien que la Multiplication, ſuppoſe qu'on ſçache diviſer par cœur tout nombre moindre que 100 par tous les nombres élementaires, comme (par exemple) (69) par (7,) c'eſt à quoi la Table de la Muliplication eſt encore utile: car elle apprend que 9 fois 7 font 63; d'où il eſt évident que 7 eſt en 63, 9 fois juſte: & par conſequent auſſi 9 fois en 69, avec un reſte (6.) C'eſt pourquoi lorſqu'on apprend cette Table, il eſt bon de ſe rendre auſſi ces diviſions familieres, afin d'en diminuer la peine, qui eſt encore aſſez grande pour les commençans.

1r EXEMPLE.

Dividende 72 } 6
Diviſeur. 12 } *Quotient*

Reſte 00

Ceci ſupoſé, pour diviſer 72 par 12, on écrit le 1r chiffre (1) du Diviſeur (12) ſous le 1r (7) du Dividende (72,) lorſque ce 1r chiffre du Diviſeur eſt plus petit; &

les autres de ſuite. Et au lieu de demander [12 en 72, combien de fois?] On ſe contente de demander [1 en 7 combien de fois?] afin d'operer par parties. Or on trouve qu'il y eſt 7 fois préciſément : mais comme le (2) du Diviſeur n'eſt pas en même-temps 7 fois dans le (2) du Dividende, il eſt évident auſſi, que 12 ne peut pas être 7 fois préciſément dans 72 : on prend donc ſeulement (6) fois pour Quotient, qu'on écrit dans un trait au côté droit ; (car il eſt bon de remarquer que les trois dernieres operations de l'Arithmetique ſont tâtonneuſes, & ne frapent pas d'abord au but, comme les trois premieres.) Mais parce que 12 pourroit être 6 fois dans 72, avec quelque reſte de plus : pour trouver ce reſte, s'il y en a un, on multiplie tout le Diviſeur 12 par le Quotient 6, & l'on ôte le produit du Dividende ; ce qui donne le reſte deſiré, quand il y en a un. Or on fait tout enſemble cette multiplication, & cette ſouſtraction par parties en cette maniere, afin d'abbreger : On dit [6 fois 2 font 12, de 12 qui eſt au deſſus (en empruntant une dixaine ſur les chiffres precedens, comme dans la Souſtraction) il ne reſte rien.] On écrit donc zéro ſous une barre dans le même rang, & on retient (1) pour la dixaine empruntée ; on continuë, diſant [ſix fois 1 font 6, avec 1 que je retiens, la ſomme eſt 7, que j'ôte du 7 qui eſt au deſſus, [le reſte eſt encore zêro] qu'on écrit dans ce rang à côté du 1ᵉ reſte, par là l'on connoît que 12 eſt 6 fois exactement dans 72, ſans qu'il reſte rien du tout.

Il faudra faire de même lorſqu'il s'agira de partager également un nombre quelconque, comme 72 à un autre nombre ; ſuppoſez à 12 perſonnes. Car on ſuppoſe dans ce partage égal que les 12 perſonnes reçoivent d'abord chacun un entier ſenle-

ment, que la 2e fois ils en reçoivent encore chacun autant ; la 3e fois de même, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que la ſomme à diviſer 72 ſoit entierement épuiſée ; ou que du moins le reſte ſoit trop petit, pour être diſtribué également à 12. Or il eſt évident que la part de chacun (le partage étant fait) marquera combien de fois chacun ſera revenu au partage ; & par conſequent auſſi combien de fois le nombre 12 des partagés eſt contenu dans le Dividende 72. D'où il eſt évident que chercher combien le nombre 72 étant diſtribué également à 12 perſonnes donne à chacun, ou combien 12 eſt contenu en 72, c'eſt préciſément la même queſtion. Donc diviſer 72 par 12, ou à 12, ou en en 12, c'eſt auſſi la même queſtion.

2d EXEMPLE.

				Reſte.
	5	7	8	9
		9	2	6 $2\frac{85}{92}$
2d *Dividende*	2	6	9	
		9	2	
Dernier reſte, . .		8	5	

II. Il arrive ſouvent que le premier chiffre du Diviſeur eſt plus grand que le 1r du Dividende, & ſouvent auſſi, que le Dividende contient beaucoup plus de chiffres que le Diviſeur. Dans ce dernier cas la Diviſion ne ſçauroit s'achever du 1r coup ; mais il faut la faire à pluſieurs repriſes en cette maniere.

Soit le nombre (5789) à partager également à (92) perſonnes ; parce que le 1r chiffre 9 du Diviſeur eſt plus grand que le 1r 5 du Dividende, j'écris par regle generale ce 9 ſous le 2d (7) du Dividende, & le 2 ſous le 8 ; je dis enſuite [9 en 57, combien de fois ? Il y eſt 6 fois] que j'écris au Quotient : car comme je ne puis pas dire tout d'un coup combien 92 eſt en 578, je me regle ſur le 1r

chiffre 9 du Diviſeur, parce qu'il vaut toûjours plus qu'aucun de ſes ſuivans; mais comme 578 pourroit contenir 92, 6 fois avec un reſte, pour trouver ce reſte, je multiplie par parties 92 par le Quotient 6, & j'ôte le produit de 578, comme dans le 1r article, diſant [6 fois 2 font 12; 12 de 18, qui ſont au deſſus, le reſte eſt 6] que j'écris ſous le 8 & le 2, & je retiens l'emprunt (1.) Je dis enſuite [6 fois 9 font 54, & 1 que je retiens, la ſomme eſt 55; de 57 qui ſont au deſſus, le reſte eſt 2,] que j'écris ſous le 9 à côté du 6; ce qui me fait déja connoître que 578 partagez à 92 perſonnes, c'eſt 6 pour chacun, & qu'il reſte encore de 578, 26 à partager aux mêmes 92. C'eſt pourquoi ces (26) doivent ſe rejoindre, avec le reſte (9) de la ſomme à diviſer, pour être emſemble partagez à 92. Je deſcends donc ce 9 reſtant à la ſuite du reſte (26,) ce qui me fait un reſte total 269 à diviſer encore à 92. Pour parvenir à faire cette 2e diviſion, j'écris toujours le Diviſeur general 92 ſous le Dividende 269; ſçavoir le 1r chiffre 9 ſous le ſecond 6, à cauſe qu'il eſt plus grand que le premier 2. (& remarquez qu'il doit toûjours l'être, autrement on n'auroit pas mis aſſez la 1re fois au Quotient; auquel cas il faudroit y mettre 7, au lieu de 6, & recommencer la Multiplication & la Souſtraction, pour avoir un autre reſte moindre que 26.) Je dis donc [9 en 26 y eſt 2 fois] que j'écris à la ſuite du 1r Quotien 6, & je cherche le reſte de la diviſion à l'ordinaire, diſant [2 fois 2 font 4, de 9 qui eſt au deſſus, le reſte eſt 5] que j'écris deſſous. Enfin [2 fois 9 font 18, de 26 qui ſont au deſſous, le reſte eſt 8] que j'écris ſous le 9 à côté du 5; ce qui me donne pour Quotient total deſiré (62,) & pour le dernier reſte (85,) qui eſt trop petit pour être partagé à 92. On peut donc

donc assurer que 92 est 62 fois en 5789, & qu'il y a encore 85 de surplus.

3e EXEMPLE

5 6 8 7 6 3 | 1 4 2 | 4005 53/142

0 0 0, 7
1 4 2

0 0 7 6
1 4 2

0 7 6 3
1 4 2

0 5 3

III. Il arrive encore quelquefois que la 1re Division étant faite, le Diviseur est plus grand, que tout ce qui reste de cette 1re operation; quoiqu'il soit plus petit, que tout ce qui reste du Dividende. Comme l'on a par exemple (568763) à partager également à (142.) On trouve après la premiere division faite, (000) pour le reste. Avançant donc d'une place vers la droite, le diviseur 142 sous ce reste, & descendant le 1r chiffre 7 du reste total du Dividende general à la suite du reste (000,) comme dans les articles precedens, on a pour 2d dividende particulier (0007) à partager à (142.) Et comme 142 étant plus grand que 7, ce partage ne peut par consequent se faire, on écrit zéro pour 2d quotient à côté du premier. On continuë de descendre encore le chiffre suivant 6 du Dividende principal à côté du 7; ce qui donne (76) pour 3e dividende particulier; lequel étant encore moindre que le Diviseur 142, il faut écrire un second zéro après (40) pour le quotient de cette 3e division; & descendre encore le chiffre suivant 3 du premier Dividende, à côté du reste à diviser 76: ce qui donne 763 pour 4e dividende particulier, sous lequel on écrira le Diviseur 142, parce qu'il est moindre; sçavoir le 1r chiffre 1 sous le premier 7, en l'avançant toûjours d'une place vers la droite, & l'on acheve la Division à l'ordinaire,

disant [1 en 7, il y est 7 fois ;] mais comme le reste 42 est trop éloigné d'être aussi 7 fois dans le reste 65, on met seulement 5 au Quotient, & on cherche le reste de la Division, disant [5 fois 2 font 10, de 13 il reste 3,] qu'on écrit dessous, retenant 1 ; ensuite [5 fois 4 font 20, & 1 de retenu font 21 ; de 26,] le reste reste est 5, qu'on écrit encore dessous à côté du 3, retenant 2 ; enfin [5 fois 1 font 5, & 2 de retenus, la somme est 7 ; de 7] le reste est zéro ; ce qui donne pour le Quotient total desiré (4005, & pour le dernier Reste (53.)

IV. Souvent il se trouve aussi des zéros à la fin du Dividende principal, ou du Diviseur, ou même dans le corps de la somme à diviser, qui peuvent faire quelque incident, comme on va le voir.

4e EXEMPLE.

5 0 0 9 ϕ ϕ ϕ ϕ } 8238 316/608
6 0 8 ϕ }

1 4 5 0
6 0 8

2 3 4 6
6 0 8

5 2 2 0
6 0 8

3 5 6

Soit par exemple pour Dividende (50090600,) & pour Diviseur (6080 ;) ayant écrit (608) sous (5009) à l'ordinaire ; sçavoir le 6 sous le 1r zéro, à cause qu'il est plus grand que le premier chiffre 5 du Dividende, je porte le dernier zéro du Diviseur sous le dernier du Dividende ; & par regle générale, je les tranche tous deux : je ferois la même chose, s'il y en avoit davantage au Diviseur. Je continuë ensuite la Division, comme si ces deux zéros n'avoient point lieu ; ce qui me donne 8 seulement pour premier Quotient : &

pour avoir le reste, je dis [8 fois 8 font 64, de 69, le reste est 5] que j'écris dessous, & je retiens l'emprunt (6.) Ensuite [8 fois rien n'est rien, & l'emprunt font 6; de 10 qui est au dessus, le reste est 4,] que j'écris sous le zéro, retenant 1. Enfin [8 fois 6 font 48, & 1 de retenu, la somme est 49, de 50, le reste est 1,] que j'écris à côté du 4. Ainsi le reste de cette premiere division est (145,) à côté duquel je descend le zéro du Dividende qui suit sa 1re partie (5009) immédiatement; ce qui me donne (1450 pour 2d dividende, sous lequel par consequent j'avance le Diviseur 608; sçavoir d'une place à droite à l'ordinaire, & je trouve 2 pour quotient de cette 2e division, par lequel je multiplie le Diviseur 608, disant [2 fois 8 font 16, de 20 qui est au dessus, le reste est 4,] que j'écris sous 8, retenant l'emprunt 2; ensuite [2 fois 0, n'est rien; mais je retiens 2; de 5, le reste est 3,] que j'écris à côté de 4; & ainsi de suite, jusqu'à la fin de la Division; ce qui me donne (8238) pour Quotient total, & 356 pour dernier reste.

Après tous ces exemples il ne restera aucune difficulté sur tous les autres, qu'on voudra se proposer, comme chacun peut l'experimenter.

5e EXEMPLE.

$$\left.\begin{matrix}360\\10\end{matrix}\right\}36\phi\left.\right\}\left\{\begin{matrix}3600\\100\end{matrix}\right\}36\phi\phi$$

V. A l'égard des abbrégez de la Division, remarquez (1) que lorsqu'on a des nombres à diviser par l'unité jointe à des zéros; sçavoir par (10, 100, 1000, &c.) la régle générale est d'en retrancher autant de figures à droite, que le Diviseur contient de zéros; ainsi (360) divisez par 10 donnent 36, qui se trouvent en

tranchant le zéro de 360; de même (3600) diviſez par 100, donnent encore (36,) qui reſtent après avoir tranché les deux zéros de (3600.)

6e EXEMPLE.

8 0 9 0 7 / 1 0 } 8090 7/10

8 0 9 0 7 / 1 0 0 } 809 07/100

8 0 9 0 7 / 1 0 0 0 } 80 907/1000

8 0 9 0 7 / 1 0 0 0 0 } 8 0907/10000

2. De plus, (80907) étant diviſez par (10,) donnent (8090) pour Quotient, & 7 pour le reſte de la Diviſion; & étant diviſez par (100) donnent ſeulement (809) pour Quotient, & (07) pour le reſte de la Diviſion, & de même de tous les autres. On verra dans la ſuite de ce traité ce qu'on doit faire de ces reſtes de diviſion.

3. Toutes les fois que l'on peut prendre, ſans calcul une ſemblable partie aliquote du Dividende & du Diviſeur, on peut abbreger encore la Diviſion. Si le Dividende eſt par exemple 150 qu'il faille partager à 35, prenant la 5e partie de 150; ſçavoir 30, & auſſi la 5e partie de 35, ſçavoir 7, & diviſant 30 par 7, le Quotient eſt 4, & il reſte encore 2 à partager à 7, qui eſt préciſément le même Quotient & le même reſte, que ſi l'on avoit partagé 150 à 35; ce qui auroit donné pour Quotient 4 & 10 de reſte à partager à 35, qui eſt la même choſe que 2 à partager à 7, comme il eſt évident.

A l'égard des reſtes de la Diviſion, comme ſi un reſte eſt 7, ou 97, &c. & le Diviſeur 10, ou 100, &c; ou ſi le reſte eſt 4, & le Diviſeur 5, &c. on met ordinairement le Diviſeur ſous ces Reſtes. Ainſi (7/10) (97/100,) (4/5) &c. en les ſeparant

par une barre, & ces 2 nombres ainſi joints ſe nomment une Fraction, dont le chiffre ſupérieur s'appelle le Numérateur, ou le Dividende, & l'inferieur le Dénominateur, ou le Diviſeur de la fraction; & elle s'exprime ainſi ($\frac{7}{10}$) 7 dixiémes, ($\frac{97}{100}$) nonante-ſept centiémes; ($\frac{1}{2}$) un demi; ($\frac{2}{3}$) deux tiers; ($\frac{3}{4}$) trois quarts; ($\frac{4}{5}$) quatre cinquiémes, &c. parce que ſi 1 partagé à dix perſonnes donne 1 dixiéme à chacun, il eſt évident que pour diviſer 7 à 10 perſonnes, c'eſt 7 dixiémes à chacun: ce qui eſt principalement utile dans les Diviſions, où le Diviſeur eſt un fort petit nombre; & en même-tems partie de l'Entier. S'il falloit par exemple diviſer 163 liv. à 5 perſonnes, on trouveroit pour Quotient (32 liv. & $\frac{3}{5}$;) & comme (5 eſt le quart de 20 ſols, valeur de la livre, il eſt évident que ($\frac{1}{5}$) de livre eſt 4 ſols, & que ($\frac{3}{5}$) font par conſequent 12 ſols: ainſi en ce cas, ces reſtes de diviſions ſont aiſez à évaluer.

Lorſque le Dénominateur eſt 10, ou 100, ou 1000, la fraction ſe nomme Décimale. On ne traitera des Fractions que dans la 2e Partie; comme étant très-peu utiles dans l'uſage de l'Arithmetique, chaque Entier ayant ſes parties propres.

Remarques ſur les Multiplications & Diviſions qui ſe ſuivent.

VI. Si l'on a un nombre comme (par exemple 15) qu'il faille dabord multiplier par 8, pour diviſer enſuite le produit 120 par le Diviſeur 12, on abregera l'opération, en multipliant par une partie du Multiplicateur naturel 8, comme par ſon quart 2, ce qui donne 30 pour produit; & diviſant ce produit par le quart du Diviſeur naturel 12,

sçavoir 3, c'est-à-dire par une partie du Diviseur, pareille à celle qu'on a prise dans le Multiplien-de; ce qui donne pour Quotient 10, qu'on auroit trouvé en divisant d'abord 120 par 12; & ce qui vient ce que si d'un côté le produit de 15 par 2 est quatre fois moindre que celui de 15 par 8, qu'il falloit prendre; en recompense le Nombre des partagez 3 étant aussi 4 fois moindre, que le diviseur 12 proposé, le Quotient qui marque la part de chaque partagé, doit toujours être le même.

Ce seroit encore la même chose s'il falloit d'abord diviser 15 par 12, pour multiplier ensuite le Quotient par 8; car en divisant 15 par 3, le Quotient est 5, qui étant multiplié par 2, donne pour produit désiré 10.

Preuve de la Division.

4e *Exemple répeté.*

```
        8 2 3 8
          6 0 8 0
-----------------
      6 5 9 0 4
4 9 4 2 8 0
          3 5 6
-----------------
5 0,0 9 0,6 0 0
```

VII. Pour s'assurer si l'on ne s'est point trompé dans la Division, comme il n'arrive que trop souvent, lorsqu'on n'a pas d'habitude dans le calcul, il faut multiplier le Diviseur par le Quotient trouvé, & ajouter au produit le Reste de la division, s'il y en a un, la somme du tout rendra le Dividende principal, si l'on ne s'est point trompé. Ainsi par exemple pour voir si dans le 4e éxemple cy-devant, on ne s'est point trompé en partageant (50090600) par (6080,) lorsqu'on a trouvé pour Quotient (8238,) & pour reste de la Division (356;) on multiplie le Quotient

(8238) par le Diviſeur (6080, à cauſe que ce dernier eſt le plus petit; (ce qui abrege toujours l'opération, & d'ailleurs eſt arbitraire, comme on l'a vû dans théorie de la Multiplication) & l'on ajoûte le reſte (356) avec les produits particuliers; ce qui donne pour produit total (5009,060, auquel ajoûtant le zéro du Diviſeur, qui en avoit été retranché, il vient le Dividende principal; ce qui confirme que l'on ne s'eſt point trompé dans la Diviſion.

Théorie de la Diviſion.

VIII. On peut toujours faire la même remarque ſur cette opération, quant à ſa commodité, que ſur les trois précédentes, parce qu'elle procede par parties comme elles.

A l'égard de ſa juſteſſe on n'en peut pas non plus douter, ſi l'on conſidere bien la maniere dont on y opére; & il ne peut reſter de difficulté au plus, que ſur la maniere dont on arange les differents quotients, & ſur ſa preuve. Or ſi l'on reprend (par exemple) le 2d exemple, on verra que ce n'eſt pas ſimplement 578 que l'on diviſe à 92 par la 1re opération, mais (5789, ainſi le 1r quotient n'eſt pas ſimplement 6, mais 60. A l'égard de la 2e diviſion, ſon quotient eſt ſimplement 2 unitez, puiſque ſon dividende (269) n'a aucun chiffre après lui. On doit donc dire que 92 eſt 60 fois, & 2 fois de plus en 5789; c'eſt-à-dire en un mot 62 fois. Ainſi le 2d quotient doit ſuivre le 1r imédiatement, puiſqu'il a toujours un zéro de moins à ſa ſuite; le 3e quotient doit de même ſuivre le 2d imédiatement, puiſqu'il a auſſi à ſa ſuite un zéro de moins que ce ſecond; & cela à 5780

cauſe qu'à chaque diviſion on eſt obligé de deſcendre un chiffre du Dividende principal à côté du reſte de la derniere diviſion, pour former une nouvelle partie de ſomme à diviſer, ou dividende particulier; ſans quoi la diviſion ne pourroit ſe continuer; le Diviſeur devant toujours être plus grand que chaque reſte de diviſion, lorſqu'on a bien opéré, comme on l'a vû ci-devant.

A l'égard de la preuve, il eſt bien évident que ſi (608) eſt (8238) fois avec quelque reſte, comme 356 en (5009060,) réciproquement prenant (608) 8238 fois, c'eſt-à-dire multipliant 608 par 8238, & ajoutant le reſte (356) au produit, on doit retrouver le Dividende propoſé (5009060.)

Enfin quant aux abbregez de l'article 5, on peut s'en aſſurer, en faiſant l'opération tout au long. On peut conſiderer auſſi, que quand on retranche un zéro d'une ſomme, comme de 360, on fait enſorte que le chiffre précédent 6 qui valoit des dixaines, ne vaut plus que des unitez, & que le 3e 3 qui valoit des centaines, ne vaut plus que des dixaines, & des autres à proportion, s'il y en a davantage. De ſorte que chaque chiffre valant dix fois moins qu'il ne valoit, on doit être perſuadé que la ſomme entiere ne vaut plus auſſi, que la dixiéme partie de ce qu'elle valoit auparavant. Si l'on en retranche 2 zéros, chacun de ſes chiffres ſera réduit à la centiéme partie, & par conſequent auſſi la ſomme entiere ne vaudra plus que la centiéme partie de ce qu'elle valoit, & ainſi des autres à proportion.

Si les derniers chiffres de la ſomme à diviſer ſont des nombres, comme dans 80907 du 6e exemple, partageant cette ſomme en deux parties, comme (80900) & (7,) & diviſant (80900) par (10,) on aura pour Quotient (8090,) com-

me si on avoit seulement retranché le (7;) lequel (7) demeurera pour Reste ainsi (8090.7.) Si l'on partage (80907) dans les deux parties (80000) & (907,) & qu'on divise (80000) par 1000, on aura (80) pour quotient, comme si on avoit seulement retranché (907,) qui demeura pour Reste ainsi (80. 907.).

CHAPITRE VI.

De l'Addition des Entiers avec parties.

1r EXEMPLE.

3789 ℔	15 s	8 d
207	19	11
500	12	10
798	11	11
6400	10	9
3	4	
Total.. 11697 ℔	11 s	1 d
	71 / 23 } 3	49 / 12 } 4
	11	1

ART. I. IL y a de deux sortes de Parties d'Entiers : les premieres qui se réduisent les unes dans les autres, comme les livres qui se réduisent en sols, les sols en deniers, les deniers en oboles, &c. ou tout au contraire, & qu'on peut à cause de cela nommer Parties consecutives. Les autres qui sont indépendantes les unes des autres, comme les aunes, tiers, quarts, sixiémes, huitiémes, douziémes d'aunes, &c. qu'on peut appeler absoluës. Nous allons donner des exemples des unes & des autres.

Soient premierement pour exemple de la premiere eſpece, pluſieurs ſommes de livres, ſols & deniers qu'il faille ajoûter en une ſeule. Pour cet effet j'écris d'abord les entiers ſous les entiers, les ſols ſous les ſols, les deniers ſous les deniers, dans l'ordre de l'Arithmetique, ayant ſoin de ſéparer les ſols des livres & les deniers des ſols par de petites lignes, afin d'éviter la confuſion, comme on le voit en cet exemple. Enſuite dequoi je commence par faire une ſomme des moindres parties, ſçavoir ici de tous les deniers, laquelle eſt 49, que j'écris deſſous, comme dans l'Addition des Entiers : & parce que dans l'uſage on ne paſſe point 11 deniers (à cauſe qu'un ſol en vaut 12,) il eſt évident qu'il s'agit de changer ces 49 deniers en ſols; ce qui ſe fait en les diviſant par 12, valeur du ſol en denier, par les régles précédentes de la Diviſion des Entiers. Cette diviſion donne au quotient 4 ſols, & il reſte 1 denier ſeulement, qu'on écrit ſous les deniers, ſçavoir ſous une barre ou trait pour les diſtinguer; on écrit auſſi les 4 ſols du quotient, ſous les ſols au deſſus de la même barre; & on fait une ſomme de tous les ſols, qu'on écrit de même ſous la barre; cette ſomme eſt ici (71 ſols;) mais parce que la livre ne vaut que 20, on ne paſſe point 19 ſols dans l'uſage ordinaire : c'eſt pourquoi il faut encore faire des livres de ces 71 ſols, en les diviſant par 20, comme des entiers; ce qui donne au quotient 3 liv. que l'on écrit au rang des livres ſur la barre, & les 11 ſols de reſte ſe mettent ſous la même barre, au rang des ſols, à côté des deniers. Enfin on fait une ſomme de toutes les livres à l'ordinaire, qui eſt ici (11,697. De ſorte que la ſomme totale deſirée (11,697 lb —— 11ſ —— 1d.

2d EXEMPLE.

37908	5 toises.	5 piéds.	0 pouces.	3 lignes.
20043	4	10	0	
9052	3	11	11	
78034	5	9	9	
698076	4	8	10	
	4	3	2	
1184294	toises. 0	piéds	4 pouces.	9 lignes.

ON fera de même pour toutes les autres especes de cette nature, comme on peut le voir dans le 2d exemple ci-joint, lequel est composé de toises, dont chacune vaut 6 pieds; de pieds, dont chacun vaut 12 pouces; de pouces, dont chacun vaut 12 lignes, & de lignes, dont chacune vaut 6 points.

3e EXEMPLE.

35	aunes. 3	quarts. 5	6émes. 1	tiers. 7 12émes.
12	2	1	2	5
128	1	0	2	11
304	3	1	0	5
285	1	5	1	0
98	0	0	1	7
	8			
870	aunes. 2	quarts. 0	6émes. 1	tiers. 11 12émes.

II. Soient presentemẽt plusieurs sõmes d'Entiers & de parties non reductibles entr'elles ou absoluës, dont il faille faire une sõme totale, je prens pour exemple des aunes, des quarts d'aunes, des sixiémes, des tiers & des dou-

ziémes. Ayant donc écrit toutes les aunes en une même colonne, tous les quarts dans une autre, les ſixiémes, les tiers, & les douziémes en autant d'autres colonnes, & cela ſans aucun choix affecté, je commence, pour obſerver quelque ordre, par faire une ſomme totale de toutes les dernieres parties, qui ſont icy les douziémes. Cette ſomme eſt (35) 12émes; mais comme douze 12émes font une aune, on ne paſſe point onze 12émes dans l'uſage; c'eſt pourquoi je réduis ces 35 12émes en aunes, en les diviſant par (12) valeur de l'aune, ce qui me donne au quorient 2 aunes, & onze 12émes de reſte, que j'écris dans le rang des 12émes ſous une barre, comme dans l'article précédent, reſervant les 2 aunes du quotient pour la fin de l'addition. Je paſſe donc à l'eſpece precedente qui ſont des tiers, dont la ſomme eſt 7 tiers; mais comme trois tiers font une aune, je diviſe ce 7 par (3;) ce qui me donne encore 2 aunes & un tiers de reſte, que j'écris ſous les tiers, reſervant toujours le Quotient (2 pour la fin. Je fais de même des 6émes, dont la ſomme eſt (12,) laquelle étant diviſée par 6, donne 2 aunes juſte, que je reſerve pour la fin, écrivant le zéro de reſte ſous ce rang, ſeulement pour remplir la place, & faire voir qu'on n'a rien obmis. Enfin la ſomme des quarts eſt 10, laquelle étant diviſée par 4, donne encore 2 aunes au Quotient, & 2 quarts de reſte, que j'écris ſous les quarts. J'écris enſuite toutes les aunes des Quotients en une colonne, dont je fais une ſomme qui eſt ici huit aunes, que j'écris au rang des aunes, dont j'acheve l'addition, comme pour les entiers; & la ſomme totale deſirée ſe trouve alors être (870 aunes 2 quarts 0 ſixiémes 1 tiers & 11 douziémes,) & de même pour toutes les autres eſpeces de cette nature.

CHAPITRE VII.

De la Soustraction des Entiers avec Parties.

ART I. IL y a aussi de deux sortes de Soustractions d'entiers avec parties ; sçavoir celle des parties consecutives, & celle des parties irréductibles, ou absoluës,

1er EXEMPLE.

Total	37985 liv. pes.	7 onces.	6 drach.	2 deniers	20 grains.
Déduit	29988	8	7	2	22
Reste..	7996	14	6	2	22
Preuve	~~37985~~	~~7~~	~~6~~	~~2~~	~~20~~

$$\frac{\cancel{23}}{\cancel{16}}\Big\{1 \quad \Big|\frac{\cancel{14}}{\cancel{8}}\Big\{1 \quad \Big|\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\Big\{1 \quad \Big|\frac{\cancel{44}}{\cancel{24}}\Big\{1$$

$$\cancel{7} \qquad \cancel{6} \qquad \cancel{2} \qquad \cancel{20}$$

Pour la premiere espece ayant écrit la somme à soustraire par exemple (29988 ℔ pesant, 8 onzes, 7 drachmes, 2 deniers, 22 grains) sous la somme fondamentale (37985 livres pesant, sept onces, 6 gros, 2 den. 20 grains,) sçavoir les entiers sous les entiers, les onces sous les onces, &c. Comme dans l'addition des Parties, je commence la soustraction par les moindres parties, qui sont les grains ou scrupules ; & comme on ne sçauroit ôter 22 grains de 20 grains, j'emprunte tacitement 1 denier qui vaut 24 grains, dont j'ôte ces 22 grains, le reste est 2 grains, qui avec les 20 grains de la somme fondamentale que j'ai laissé

en arriere, font 22 grains de reſte, que j'écris au deſſous ; ſçavoir ſous une barre à l'ordinaire, & je retiens (1) d'emprunt que j'ajoute aux 2 deniers à ôter, la ſomme eſt 3 deniers, qu'on ne peut ôter des deniers qui ſont au deſſus ; j'emprunte donc encore tacitement un gros ou une drachme qui vaut 3 deniers, dont j'ôte ces 3 deniers, le reſte eſt zéro, qui avec les 2 de la ſomme fondamentale font 2 deniers de reſte ; & je retiens encore 1, que j'ajoute avec les 7 gros à ôter, la ſomme eſt 8, que je ne puis encore ôter des 6 qui ſont au deſſus, c'eſt pourquoi j'emprunte encore une once qui vaut 8 gros, dont j'ôte ces 8, le reſte eſt encore zéro, qui avec les 6 laiſſez en arriere, font toujours 6 gros de reſte, que j'écris deſſous, retenant l'emprunt 1. Enfin j'ajoute cet emprunt 1 aux 8 onces à ôter, la ſomme eſt 9, qui ne peut s'ôter de 7 ; j'emprunte donc une livre peſant, qui vaut 16 onces, dont j'ôte ces 9 onces, le reſte eſt 7, qui avec les 7 de deſſus font 14 onces de reſte, & je retiens 1 pour ajouter aux huit livres peſant à ôter, & je continuë la ſouſtraction, comme pour les ſimples entiers ; & l'opération étant achevée, je trouve pour le reſte deſiré (7996 liv. pes. 14 onces. 6 gros. 2 deniers 1 2 grains.

Preuve.

Et pour m'aſſurer que je ne me ſuis point trompé, j'ajoûte ce reſte avec la ſomme à ôter (29988 livres peſant, &c.) comme dans le chapitre précedent ; ce qui me rend ma ſomme fondamentale (37985 livres peſant, &c.) d'où je conclus que mon operation eſt bonne.

On fera de même pour toutes les autres eſpeces

de cette nature, comme on peut le voir encore dans l'exemple ſuivant ſur le Temps, où l'on prend les années de 365 jours ſeulement, les jours de 24 heures, les heures de 60 minutes, & les minutes de 60 ſecondes, & auquel on a auſſi ajouté ſa preuve en faveur des commençans.

2d EXEMPLE.

32576 ans.	275 jours.	13 heures.	28 minut.	12 ſecond.	
29879	356	18	15	25	
2696	283	19	12	47	
Preuve					

II. Pour exemple des parties abſoluës ou irréductibles entr'elles, nous propoſerons encore des aunes & parties d'aunes, comme par exemple (279805 aunes, 3 quarts, 7 huitiémes, 7 neuviémes, 11 douziémes à ôter d'une pareille Somme) comme de 325708 aunes, 3 quarts, cinq huitiémes, 7 neuviémes, 7 douziémes. déduit

3e EXEMPLE.

Total 325708 aunes.	3 quarts.	5 8émes.	2 9émes	7 11émes.	
déduit 279805	3	7	7	11	
	I				
	I				
	I				
Reſte 45900	0	6	4	8	
Preuve					

Les ayant donc écrites la plus petite ſous la plus grande, dans l'ordre de leurs parties, je commence encore par les moindres, qui ſont les douziémes; & comme je ne puis ôter 11 douziémes de 7 douziémes de la ſomme fondamentale, j'emprunte 1 de ſes aunes, que je marque ſous celles de la ſomme à ôter, laquelle aune vaut 12 douziémes, dont j'ôte les 11 douziémes, le reſte eſt 1 douziéme, qui avec les 7 douziémes de deſſus que j'ai laiſſé en arriere font 8 douziémes de reſte, que j'écris deſſous. Je paſſe enſuite à l'eſpece precedente; & parce que je ne puis ôter 7 neuviémes de 2 neuviémes qui ſont au deſſus, j'emprunte encore une aune de la ſomme fondamentale, laquelle aune je marque encore ſous celles de la ſomme à ôter, & cette aune valant 9 neuviémes, j'en ôte 7 neuviémes, le reſte eſt 2 neuviémes, qui avec les 2 deſſous font 4 neuviémes de reſte, que j'écris deſſous. Je continuë de même pour les huitiémes & pour les quarts. Je fais enſuite une ſomme des 5 aunes à ôter, & des 3 emprunts qui ſont deſſous, laquelle ſomme eſt 8, que j'ôte des 8 de deſſus, le reſte eſt zéro, & j'acheve la ſouſtraction, comme pour les entiers à l'ordinaire : ce qui donne pour le reſte total requis (45900 aunes, 0 quarts, 6 huitiémes, 4 neuviémes, 8 douziémes;) & pour m'en aſſurer, j'ajoute ce reſte avec la ſomme à ôter (279805 aunes, &c.) comme dans le chapitre precedent : ce qui me rend ma ſomme fondamentale (325708 aunes, &c. D'où je conclus que je ne me ſuis point trompé dans ma ſouſtraction.

CHAPITRE VIII.

De la Multiplication des Entiers, avec des Parties.

CEttemultiplication eſt auſſi de deux eſpeces, car ou l'on a des entiers avec des parties à multiplier par des entiers ſeuls, ou par des entiers joints avec des parties ; ce dernier cas ſe réſout par deux métodes differentes, dont l'une s'appelle Multiplication effective, l'autre Multiplication proportionnelle, ou par parties Aliquotes, & en Géométrie (Toiſé.)

Multiplication d'Entiers & Parties par des Entiers.

1r EXEMPLE.

Multiplien-de.	25liv	15f	8d
Multiplica-teur.	8	8	8
	200liv.	120f	64d
	6	5	12
		125	61 4d
		20	
Produit	206liv	5f	4d

ART. I. Soient donc preſentement pour exé-ple de la premiere eſpece (25liv 15f 8d à multiplier par l'entier 8, comme s'il y avoit 8 perſonnes, à chacune deſquelles il fallût donner (25 liv. 15f 8d, & qu'on déſirât de ſçavoir à combien ſe monteroit toute la diſtribution. Pour y parvenir, j'écris le Multiplicateur 8 ſous chaque partie du Multipliende, ſçavoir ſous les 25 liv. ſous les 15f & ſous les 8d, pour en

faire trois differens produits, dont le premier eſt 200 liv. le ſecond 120 ſols, & le 3e 64 deniers. Et comme ce nombre de deniers ſurpaſſe 11, je les diviſe par 12, valeur du ſol en deniers pour en faire 5 ſols, & il reſte 4 den. que j'écris deſſous, ſçavoir ſous une barre, pour éviter la confuſion : j'ajoute enſuite ces 5 ſols avec les 120 provenans de la multiplication de 15 par 8 ; ce qui donne 125 ſols ; mais comme cette ſomme ſurpaſſe 19 ſols, je la diviſe par 20 valeur de la livre en ſols, ce qui me donne 6 liv. & 5 ſols de reſte, que j'écris ſous la même barre au droit des ſols. Enfin j'ajoute ces 6 livres avec les 200 venues de la multiplication de 25 liv. par 8, la ſomme eſt 206 liv. que j'écris ſous les livres avec les 5 ſols & les quatre deniers de reſte ; ce qui donne pour le produit total deſiré (206 livres 5^{s} 4^{d}) que l'on trouve écrit ſous la barre au deſſous de l'operation entiere.

On pourra s'exercer encore ſur l'exemple ſuivant, & s'en propoſer tant d'autres qu'on voudra de même eſpece, ſans qu'on doive apprehender qu'il s'y trouve aucune nouvelle difficulté.

2d EXEMPLE.

Multiplende.	5 mois.	8 jours.	15 heures.	25 minut.
Multiplicateur.	26	26	26	26
	130 mois	208 jours.	130 heures.	150 minut.
	7	16	26	50
			10	
	17	224 | 7 (30)	400 | 16 (24)	650 | 10 (60)
			160	
			24	
Produit.	137 mois.	14 jours.	26 heures.	50 minut.

On n'a ſuppoſé dans cet exemple tous les mois de 30 jours, que pour rendre l'opération plus courte, & plus conforme à l'uſage civil.

Multiplication effective d'Entiers & Parties par Entiers & Parties.

II. Soient maintenant pour exemple de la 2e eſpece, 5 liv. peſant, 6 onces, 3 drachmes, à multiplier par 4 liv. peſant, 2 onces 7 drachmes par une multiplication effective. Il faut bien remarquer que dans cette ſorte de Multiplication on doit avoir trois ſortes de produits; ſçavoir le 1er un produit d'entiers par entiers: le ſecond d'entiers par parties, ou de parties par entiers; & le 3e de parties par parties; de crainte qu'on ne s'y trompe.

3e EXEMPLE.

Multiplien-de. .. 5 liv. pef. 6 onces. 3 drach. } 16
Multiplica-teur. .. 4 liv. pef. 2 onces. 7 drach. } 8
128

1re eſpece	2e eſpece.		3e eſpece.
20 A	24 B	12	23 dr. C
10	10	35	51 dr.
2			23
	7	9	115
		dr.	dr. dr.
	41 / 16 } x	56 / 8 } 7	1173 / 128 } 9 dr.
			21

Produit ... 22 liv. pef. 9 onces. 0 drach. 12 grains. P

G	g	D	E
21 dr. dr.	21	6	2
72	9	8	8
42	189	48	16
147	16	3	7

1512	gr.	29	gr.
128	11	16	12

Evaluation des dr. dr. en gr.

232
128

51 dr 23 dr

Réduction en drachmes

J'écris donc le Multiplicateur ſous le Multipliende, ſelon l'ordre de leurs parties, c'eſt-à-dire les livres ſous les livres, les onces ſous les onces, &c. ſçavoir, toujours le moindre ſous le plus grand. Enſuite, je multiplie d'abord 5 liv. peſant par 4 liv. peſant à l'ordinaire; ce qui donne 20 liv. peſant pour le produit des entiers, qui eſt la 1re eſpece de produit, que j'écris ſous les livres en A.

Je multiplie enſuite les 6 onces, 3 drachmes par les mêmes 4 liv. ce qui me donne 24 onces 12 drachmes, que j'écris deſſous, & tout de ſuite les 2 onces 7 drachmes du Multiplicateur, par les 5 liv. du Multipliende; ce qui donne encore 10 onces 35 drachmes, que j'écris ſous les 1res, & ces 4 derniers produits reciproques ſont la 2e eſpece de produits; ſçavoir celle des entiers par les parties, que l'on trouve en B.

Enfin pour avoir le produit des parties d'une part, par les parties de l'autre, (qui eſt la 3e eſpece de produit qui reſte à trouver) je reduis les 6 onces 3 drachmes du Multipliende à 51 drachmes; & les 2 onces 7 dr. du Multiplicateur à 23 drachmes, qui ſont les plus petites parties de ces ſommes; ce qui ſe fait (comme il eſt évident) en multipliant les onces par 8 (qui eſt leur valeur en drachmes,) & leur ajoûtant les drachmes qui les ſuivent, comme on le voit dans l'exemple

en D & E. Enfin je multiplie ces (13) drachmes d'une part par les 51 de l'autre ; ce qui me donne (1173) drachmes de drachmes, qui eſt la 3e eſpece de produit deſiré que l'on trouve en C.

Mais comme cette eſpece de parties eſt inconnuë dans l'uſage ordinaire, il s'agit maintenant de la réduire à des drachmes uſuelles, ou courantes ; & pour cet effet, je multiplie la valeur de la livre en onces, ſçavoir (16) par la valeur de l'once en drachmes, ſçavoir 8, ce qui me donne 128 drachmes pour la valeur de la livre en drachmes, que l'on trouve en F. Je diviſe donc ces 1173 drachmes par 128 drachmes, il vient au quotient 9 drachmes, & il reſte encore 12 drachmes de drachmes, que je ne puis évaluer en ſimples drachmes, le nombre étant trop petit ; c'eſt pourquoi je les conſidere comme des parties de drachmes, & je les multiplie par 72, comme on le trouve en G. pour en faire des parties de grains, ſçavoir 1512, de même que ſi j'avois des drachmes à réduire en grains ; deſquelles drachmes chacune en vaut 72 ; après quoi il ne me reſte plus que de continuer à diviſer ces 1512 parties de grains par mon diviſeur 128, ce qui me donne 11 grains pour la valeur des 21 drachmes de drachmes reſtantes ; & je néglige le reſte de la diviſion, comme étant des parties inſenſibles ; ou plûtôt je multiplie ſimplement le reſte 21 par la 8e partie de 72, ſçavoir par 9 ; ce qui donne le produit 189, que je diviſe enſuite par la 8e partie du Diviſeur naturel 128 ; c'eſt-à-dire par 16, & il vient toujours le même Quotient 12, comme on le voit à côté en (g.)

Enfin j'ajoute les 9 drachmes trouvées par ma premiere diviſion, avec celles de la 2e eſpece ; ce qui me donne en tout 56 drachmes, que je diviſe

par 8, pour en faire 7 onces juſte, que j'ajoute avec les onces de la 2e eſpece, leur ſomme eſt 41 onces, leſquelles je diviſe par 16, pour en faire des livres peſant; ce qui me donne 2 livres peſant & 9 onces de reſte, leſquelles 9 onces j'écris au droit des onces ſous une barre à l'ordinaire, & tout de ſuite le zero reſtant des drachmes, à la ſuite duquel zéro, j'écris encore les 12 grains provenans de la 2e diviſion. Enfin j'ajoute ces 2 livres avec les 20 livres de la premiere multiplication, & je deſcends la ſomme 22 livres ſous la barre, au droit des onces, drachmes & grains, ce qui me donne pour le produit total deſiré 22 livres peſant 9 onces, 0 drachmes, 9 grains.

Si l'on n'avoit que des livres, & onces d'une grande part à multiplier par des drachmes, deniers & grains d'autre part, ou tout au contraire, il faudroit écrire pour la Somme à mutiplier..... liv. ..... onces, 0 drachmes, 0 deniers, 0 grains;) & pour le Multiplicateur (0 livres, 0 onces..... drachmes, ... deniers, & ..... grains, ou tout au contraire, & continuer l'opération tout au long, comme dans le 1r exemple, écrivant zéro pour le produit d'un nombre par un zéro, ou d'un zero par un nombre; ce qu'on verra encore plus amplement dans les regles de proportion ci-après.

Multiplication par parties aliquotes.

III. On fait cette eſpece de multiplication d'entiers & parties par entiers parties, toutes les fois que l'entier & ſes parties ne contiennent chacune qu'un petit nombre de parties, & que le nombre de ces dernieres contient beaucoup de parties aliquotes éxactes; comme (par exemple) lorſque

l'eſpece ſont des toiſes qui ne contiennent que ſix pieds, dont un ne vaut que 12 pouces, un deſquels n'eſt compoſé que de 12 lignes, dont une n'eſt diviſée qu'en ſix points. Car outre que les nombres 6 & 12 ſont fort petits, ils contiennent pluſieurs parties éxactes, comme des moitiez, des tiers, des quarts; il en eſt de même des livres peſant; & cette Multiplication proportionnelle a encore cet avantage, qu'il n'eſt pas neceſſaire que le Multipliende & le Multiplicateur ſoient tous deux de même eſpece. Comme ſi le prix d'une toiſe d'ouvrage étant établi de (25 liv. 9ſ 7d, on demande par proportion combien (3 toiſes, 5 pieds 7 pouces)de ce même ouvrage doivent coûter. Car il eſt évident que pour répondre à cette queſtion, il ne s'agit que de multiplier le prix de la toiſe, ſçavoir (25 l. 9 ſ. 7 den.) par les 3 toiſes, & par les 5 pieds 7 pouces pris proportionnellement; ce qui ſe fait en cette maniere.

4e EXEMPLE.

Multiplien-de.	25 livres.	9 ſols.	7 deniers.	
Multipli-cateur.	3 toiſes.	1 5 pieds.	3 7 pouce.	
	75 liv	27 ſ	21 d	
	16	18	20	1 ob.
†	4	4	11	0
	1	8	3	1
	1	1	2	2
	3	4	2	
	62 20	3	59 12	*
Produit total.	100 liv	2 ſ	11 d	

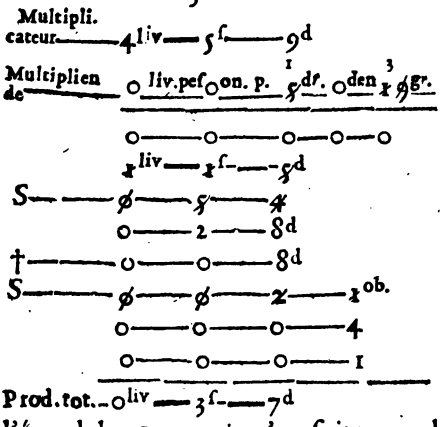
Je multiplie premierement les 25 liv. 9 ſ. 7 d. par 3 toiſes, c'eſt-à-dire par 3, comme dans l'article precedent, ce qui me donne pour 1r produit (75 liv. 27 ſ. 21 d.) que j'écris ſous une bar-

re. Je paſſe enſuite aux 5 pieds, dont je laiſſe 1, que je marque au deſſus, par régle générale, à cauſe des pouces qui ſuivent les pieds ; je multiplie donc encore 25 liv. 9 ſols 7 den. par les (4) pieds qui reſtent, ſçavoir proportionnellement, en diſant [une toiſe multipliant le multipliende 25 l. 9 ſ. 7 den. produiroit (25 l. 9 ſ. 7 d.) Donc par proportion (4) pieds, qui ſont les 2 tiers d'une toiſe, doivent produire les 2 tiers de (25 liv. 9 ſols 7 d. Je prens donc les 2 tiers de 25 liv. ſçavoir 16 liv. que j'écris ſous les premieres livres produites, & reſte 1 liv. dont je faits 20 ſols, que j'ajoûte aux 9 ſols ſuivans, la ſomme eſt 29 ſols, dont les 2 tiers ſont 18 ſols, que j'écris ſous les 27 ſols de la 1re operation, & reſtent 2 ſols, dont je faits 24 deniers, que j'ajoûte avec les 7 deniers ſuivans, la ſomme eſt 31, dont les 2 tiers ſont 20 deniers, que j'écris ſous les 21 de la 1re opération, & du denier reſtant je faits 2 oboles, dont les 2 tiers ſont 1 obole environ ; ainſi le produit de 4 pieds eſt 16 liv. 18 ſols 20 den. 1 obole. Je reviens enſuite à 1 pied que j'ai laiſſé ; & comme c'eſt le quart de (4) pieds qui viennent de multiplier, je prens par proportion le quart du produit de 4 pieds, c'eſt-à dire de (16 liv. 18 ſ. 20 den. 1 obole,) ſçavoir (4 liv. 4 ſols 11 den. 0 ob.) que j'écris ſous les précédens, avec une croix pour marque que c'eſt le produit d'un pied. Je paſſe enſuite aux 7 pouces, que je diviſe en 2 parties, ſçavoir 4 & 3, dont la 1re eſt le tiers, & la 2e le quart de 12, valeur du pied en pouces ; & comme 1 pied a produit (4 liv. 4 ſ. 11 den.) j'en prens par proportion le tiers, pour les 4 pouces, ſçavoir (1 liv. 8 ſ. 3 d. 1 ob.) & enſuite le quart pour les 3 pouces reſtans, ſçavoir (1 liv. 1 ſ. 2 den. 2 oboles) que j'écris ſous les produits précedens, ſelon l'ordre des parties.

Je faits enſuite une ſomme des oboles, laquelle eſt icy 4 environ. dont je forme 2 deniers que j'écris au rang des deniers : enſuite je fais une autre ſomme des deniers, ſçavoir 59, dont je forme 4 ſols, en les diviſant par 12, & il reſte 11 deniers, que j'écris au droit ſous une barre ; je porte enſuite ces 4 ſols ſous les ſols, & je fais encore une ſomme du tout, ſçavoir 62 ſols, que je diviſe par 20, pour en faire 3 liv. que j'écris ſous les liv. écrivant le reſte 2 ſols ſous les ſols : enfin je fais une derniere ſomme de toutes les livres produites, ſçavoir 100. Ainſi le produit total déſiré eſt (100 liv. 2 ſols 11 den.) pour la valeur des (3 toiſes, 5 pieds, 7 pouces) propoſez, à raiſon de (25 liv. 9 ſols 7 den. la toiſe.

On pourra s'éxercer encore ſur l'éxemple ſuivant, où l'on ſuppoſe, qu'une livre peſant d'une certaine marchandiſe coûte (4 liv. 5 ſols 9 den.) & on demande combien ſur ce pied en coûteront 5 drachmes, 0 den. 19 grains.

5e EXEMPLE.



Pour y répondre, j'écris (0. l p. 0. on. 5 dr. 0. d. 19. gr.) ſous (4 l. 5 ſ. 9 d.) ſelon l'ordre des eſpeces. Je mets enſuite 0 pour le produit des liv. peſant. A l'égard des onces, je n'en faits pas de même, parce que j'ai beſoin du produit d'une once, pour

trouver celui des 5 drachmes. Je ſuppoſe donc qu'il y ait 1 once ; & comme 1. liv. peſant donneroit pour ſon produit (4 liv. 5 ſols 9 den.) par proportion 1 once (qui en eſt la 16e partie) doit donnner la 16e partie, ou le quart du quart de (4 liv. 5 ſols 9 den.) J'en prends donc d'abord le quart, ſçavoir (1 liv. 1 ſ. 5 den.) que j'écris deſſous, dans le même ordre, & je prends encore le quart de ce quart, ſçavoir (0 liv. 5 ſols 4 d.) pour le produit de l'once ſuppoſée, au droit duquel je marque une (S) pour me ſouvenir que ce n'eſt qu'une ſuppoſition, effaçant la 1re (1 liv. 1 ſ. 5 den.) Preſentement donc je multiplie par 4 drachmes, laiſſant une drachme pour regler les deniers ; & comme ces 4 drachmes ſont la moitié d'1 once, je prends la moitié de ma derniere ſuppoſition, ſçavoir (2 ſ. 8 den.) après quoi j'efface encore cette ſuppoſition 5 ſols 4 den. Et pour 1 drachme je prends le quart du dernier produit, ſçavoir 8 den. que je marque d'une croix (†) Je prends encore le tiers de ce dernier produit, ſçavoir 2 d. 1 ob. pour le produit d'un denier peſant ſuppoſé, qui me doit regler le produit des grains, & je le marque encore d'une (S,) parce que c'eſt une ſuppoſition. Enfin 1 denier valant 24 grains, je diviſe 19 en 2 parties, ſçavoir 16 et 3, qui ſont toutes deux des parties éxactes de 24. J'en prends donc 16, écrivans les 3 reſtans au deſſus ; & comme ces 16 grains ſont les 2 tiers d'1 denier, je prens les 2 tiers de la derniere ſuppoſition 2 den. 4 oboles, ſçavoir 4 oboles, & pour les 3 grains reſtans, j'en prends la 8e partie, ſçavoir 1 obole environ, & j'efface auſſi cette ſeconde ſuppoſition 2 den. 1 obole. Je fais donc preſentement une ſomme des oboles, laquelle étant convertie en deniers, donne environ 3 deniers, que j'ajoûte

avec la colonne des deniers, la ſomme eſt 19 den. dont je fais 1 ſol & 7 den. de reſte : enfin j'ajoute ce ſol avec la colonne des ſols ; ce qui me donne en tout 3 ſols 7 deniers, pour le prix des 5 drachmes, 19 grains propoſez. On fera de même pour toutes les autres eſpeces.

Au reſte la multiplication d'entiers & parties par entiers & parties, ſert dans les Regles de proportion, lorſque le premier terme eſt l'unité ; dans le Toiſé, dans l'Arpentage, dans les Regles d'Eſtimation, & dans celles d'Alliage, comme on le verra par la ſuite.

Théorie de la Multiplication des Entiers & Parties.

IV. On doit faire les mêmes réflexions ſur les opérations des trois derniers chapitres, que ſur les précedens, quant à leur commodité. Et les opérations des chapitres 6 & 7 ne doivent renfermer aucune difficulté du côté de leur théorie, après ce qui en a été dit dans ces mêmes chapitres précedens. A l'égard de celui-ci, il me ſemble qu'il ne peut y avoir que la multiplication réelle d'entiers & parties qui puiſſe arrêter par ſes differens produits & ſes réductions. Mais toutes ces difficultez ſont aiſées à réſoudre : car ſi l'on conſidere que pour multiplier (5 liv. peſant 6 onces 3 drachmes) par (4 liv. peſant 2 onces 7 drachmes) du 3e exemple ci-devant, il faut multiplier tout le Multipliende par 4 liv. peſant, enſuite par 2 onces, & enfin par 7 drachmes, c'eſt-à-dire par tout le Multiplicateur ; on verra auſſi-tôt que les livres peſant multiplieront les livres peſant ; ce qui donne la 1re eſpece de produit, ſçavoir celle des entiers par les

entiers. On trouvera de plus que les 4 livres pesant doivent multiplier les 6 onces 3 drachmes, & les 2 onces 7 drachmes, les 5 liv. pesans; ce qui compose la 2e espece de produits, sçavoir celle des parties par les entiers, & des entiers par les parties réciproquement. Enfin on verra aussi, que les 2 onces 7 drachmes doivent encore multiplier les 6 onces 3 drachmes; ce qui donne la 3e espece de produits; sçavoir celle des parties par les parties. On connoîtra encore que si les liv. pesans multipliant les liv. pesant, donnent des liv. pesant pour leur produit, par proportion les mêmes liv. pesant multipliant les onces & les drachmes, ne doivent donner que des seiziémes parties de liv. pesant, & des huitiémes parties d'onces. c'est-à-dire des onces & des drachmes; & qu'enfin si les liv. pesant multipliant des drachmes, ne donnent que des drachmes, c'est-à-dire des 128émes de liv. pesant, par proportion aussi (les onces & drachmes étant mises en drachmes, tant de part que d'autre pour abréger l'opération) les drachmes multipliant les drachmes, ne doivent donner que des drachmes de drachmes, ou des 128émes de drachmes. Quant à la réduction de ces drachmes de drachmes en drachmes usuelles, il n'est rien de plus aisé que de voir, qu'en les divisant par 128, on les réduit à des drachmes simples. Enfin à l'égard de l'évaluation des 21 drachmes de drachmes, en moindres especes, comme en grains, il ne faut que considerer, que les drachmes contenant 72 grains, les 128émes parties de drachmes doivent par proportion contenir aussi 72, 128émes parties de grains; c'est-à-dire qu'en les multipliant par 72, on en fait des 128émes de grains. Donc pour les réduire en grains, il ne reste plus que de

les diviſer par 128, & de même pour l'évaluation en deniers, &c.

Il eſt à remarquer que cette évaluation s'abrege ſouvent; ſçavoir quand le multipliant & le diviſeur ont des parties communes, comme icy 72 & 128; car il eſt évident que ſi au lieu de 72, on multiplie par ſa 8e partie 9, & qu'en même-tems au lieu de 128, on diviſe le produit par la 8e partie de 128, ſçavoir 16, on devra trouver encore le même quotient 12; puiſque ſi d'une part le produit (1512) eſt réduit à ſa 8e partie (189,) en recompenſe d'autre part le diviſeur 16 n'eſt plus que la 8e partie du 1r diviſeur (128,) comme on l'a dit dans les abregez de la Diviſion. [Or un partage égal demande, que ſi le diviſeur entier poſſede le dividende entier, la 8e partie du même diviſeur poſſede auſſi la 8e partie de tout le même dividende; que le tiers en aye le tiers; que le quart en ait le quart, & de toutes les autres parties à proportion,] comme il eſt évident.

Quant à la multiplication proportionnelle ou par parties aliquotes, il ne me paroît pas qu'elle doive contenir aucune difficulté conſiderable, après qu'on aura entendu ce qu'on vient de dire de la multiplication réelle, d'autant plus qu'elle ne renferme aucun artifice conſidérable, étant entierement fondée ſur le bon ſens.

CHAPITRE IX.

De la Diviſion des Entiers avec des Parties.

CEtte opération contient encore deux eſpeces, ſçavoir la Diviſion des entiers & parties par des entiers ſeuls; & la Diviſion des entiers avec parties, par des entiers, avec parties. Cette der-

niere eſpece a lieu dans la Géométrie, & dans les Régles de proportion, lorſque le 2d terme eſt l'unité, comme on le verra dans la ſuite.

De la Diviſion des Entiers avec des Parties par des Entiers.

1r EXEMPLE.

Dividende 368 livres. 6 ſols. 9 deniers
Diviſeur .. 13 } 28 l. 6 ſols. 8 deniers
Quotient.

108	4	8
13	20	12
04	80	96
	6	9
	86 } 6	105 } 8
	13 }	13 }
	8	1

I. Soit donc pour premier exemple la ſomme (368 l. 6 ſ. 9 den.) qu'il faille partager à 13, ou en 13 ou par 13, puiſque ces 3 queſtions reviennent à une même, comme on l'a vû dans la Diviſion des entiers. Ayant diviſé d'abord les 368 liv. à 13, comme pour les entiers, le Quotient donne 28 liv. & il reſte 4 liv. leſquelles je ne puis plus partager à 13, qui eſt un nombre plus grand; c'eſt pourquoi je les réduits dans les plus proches parties, ſçavoir en ſols, en les multipliant par 20 à l'ordinaire, & j'y ajoûte les 6 ſols du Dividende; ce qui me donne encore 86 ſ. à diviſer au même Diviſeur 13. Les ayant donc diviſez comme des entiers, il vient pour Quotient 6 ſols & il reſte 8 ſols, qui étant encore trop peu pour être partagez à 13, je les réduits auſſi dans leurs parties prochaines, ſçavoir en deniers, en les multipliant par 12 à l'ordinaire, & j'y ajoute

les 9 deniers du dividende ; ce qui donne 105 den. à partager toujours au Diviſeur 13 à l'ordinaire. Enfin cette derniere opération étant faite, il vient 8 den. au quotient, & 1 den. de reſte, que je néglige comme étant trop peu de choſe, pour être partagé à 13 perſonnes. Ainſi mon Quotient total eſt (28 liv. 6 ſols 8 den.)

On procedera de la même maniere pour toutes les autres eſpeces, ſans qu'il ſoit neceſſaire d'en donner d'autres exemples, cette opération étant trop facile & trop naturelle, pour s'y arrêter davantage.

De la Diviſion d'Entiers avec Parties, par Entiers avec Parties.

2d EXEMPLE.

Dividende — 14 liv.peſ. 5 onces. 3 drach.
Diviſeur. — 6 liv.peſ. 4 onces. 7 drach.
Divid. réduit. 1579 } 1 liv.peſ. 15 onces. 2 drach. 32 grains *Quotient.*
Divif. réduit. 807 }

772
16
4632
772
12352on } 15on
807
4282
807
247

247
8
1976 } 2ds
807
362
72
724
2534
26064gr } 32gr.
807
1854
807

Réduction en drachmes.

12 l. p.		6 l. p.	
16		16	
72		96	
125		4	
197 onc		100 on.	
8		8	
1576		800	
3		7	
1579 dr.		807 dr.	

II. Soient maintenant 12 liv. pesant 5 onc. 3 drachmes à partager par (6 liv. pesant 4 onc. 7 drach.) je réduits d'abord l'une & l'autre somme dans les mêmes plus petites parties, savoir ici en drachmes, multipliant (par exemple les 12 liv. pesant par 16 pour en faire des onces, & y ajoutant les 5 onces qui suivent; ce qui donne 197 onces, que je multiplie encore par 8 pour en faire des drachmes, auxquelles j'ajoute les 3 drachmes suivantes; ce qui donne (1579 drachmes) pour nouveau Dividende; & faisant la même chose du Diviseur, il vient pour nouveau Diviseur (807 drachmes.) Où il faut bien remarquer, que si une seule des 2 sommes contenoit des grains (par exemple) ou des deniers, il faudroit pareillement réduire l'autre somme en grains ou en deniers. Ce préparatif étant fait, je prends (1579 drachmes) & (807 drach.) pour de simples entiers, sçavoir pour des liv. pesant & je divise les premiers par les derniers; ce qui me donne au quotient 1 entier, c'est-à-dire une livre pesant, & restent 772 liv. pesant. Je multiplie donc ces liv. pesant restantes par 16 pour en faire des onces; ce qui produit un nouveau Dividende (12352 onces,) que je divise encore par le

le Diviſeur naturel (807,) le quotient eſt 15 onces, & le reſte 247 onces, que je multiplie par 8, pour en faire des drachmes ; ce qui donne 1976 drach. qui étant diviſées toujours par le Diviſeur naturel (807) produiſent 2 drachmes pour quotient, & reſte 362, leſquelles étant enfin multipliées par 72, ſe changent en grains, ſçavoir (26064 grains) que je diviſe encore par le Diviſeur naturel (807,) il vient au quotient 32 grains & je neglige le reſte 240 grains, qui ne peut plus donner la valeur d'un grain. Raſſemblant preſentement tous ces quotiens, j'en faits un Quotient total, qui eſt (1 liv. peſ. 15 onces, 2 drac. 32 gr.)

Si l'on avoit propoſé des livres en argent, il auroit falu proceder de même, réduiſant les reſtes des diviſions en ſols, deniers, oboles, &c.

Théorie.

ART. III. La Théorie du 1^r^ article n'a rien en ſoi de difficile, comme on a pû le voir, & ne contient rien qui ne ſoit renfermé dans les Théories précédentes.

Celle du ſecond article ne doit pas non plus arrêter quant au préparatif ; de ſorte qu'il ne reſte que de ſçavoir d'où vient que des drachmes diviſées par des drachmes donnent des entiers, ſçavoir des livres peſant, & pour les autres eſpeces à proportion. Pour en voir la raiſon, il faut conſiderer qu'on ne cherche autre choſe dans ces éxemples, ſinon combien, ou en quelle maniere le Diviſeur eſt contenu dans le Dividende. Or autant & en la même maniere que ce Diviſeur en entiers & parties eſt contenu dans le Dividende en entiers & parties ; autant & de la même maniere, le 1^r^ ſera contenu encore dans le dernier, l'un & l'autre étant réduits en quelles parties on voudra ; puiſque ces ſortes de réductions ne changent

point les valeurs des ſommes ; mais ſeulement leurs eſpeces. Ainſi (807 drachmes) ſont contenuës en (1579 drachmes,) autant & de la même maniere, que (6 liv. peſ. 4 onces, 7 drac.) le ſont en (12 liv. peſ. 5 onc. 3 drac.) & autant & de la même maniere (807 livres peſans) ſont contenuës en (1579 liv. peſans.) C'eſt pourquoi cette queſtion ſe réduit à diviſer ſimplement (1579 liv. peſ.) à (807 liv. peſ.) c'eſt-à-dire à une diviſion d'entiers par entiers ; ce qui donne toujours au quotient l'eſpece d'entiers du Dividende & du Diviſeur, ſçavoir des liv. peſ. ſi ces derniers ſont des liv. peſ. & des livres, ſi ce ſont des livres.

Si après la réduction faite, le Dividende ſe trouve moindre que le Diviſeur, il faudra réduire le 1r en ſes parties prochaines, comme les liv. en ſols, les toiſes en pieds, & achever la diviſion à l'ordinaire. Nous ne donnerons point d'éxemple de la Diviſion d'ẽtiers & parties par entiers & parties d'eſpeces differentes, parce que cette diviſion ne ſert, que pour faire la preuve de la Multiplication d'entiers & parties, par entiers & parties d'eſpeces differẽtes ; ce qu'on peut mieux faire en repaſſant ſur ſon opération.

CHAPITRE X.

Des Régles de Proportion droites & ſimples.

I. SUppoſez qu'on ait cette queſtion à réſoudre [Si 2 toiſes, 3 pieds, 8 pouces) coûtent (5 liv. 3 ſols 7 den.) combien par proportion doivent coûter (4 toiſes, 2 pieds 6 pouces.] La régle dont on ſe ſert pour y répondre s'appelle une Régle de proportion droite, [ou communément Régle de Trois ; ou même anciennement Régle d'Or.] Dans cette régle le 1r & 3e lieu ſont ordinairement de même eſpece, ſçavoir icy des toiſes, pieds &

pouces ; de même que le 2^d & le 4e qui ſont ici des livres, ſols & den. Les trois premiers termes ſont ordinairement donnez, & alors le 4e terme eſt inconnu & celui que l'on cherche ; c'eſt ce qui la fait nommer Régle de trois. On pourroit propoſer auſſi cette même Régle ſous cette autre forme. [Si (2 toiſes 3 pieds 8 pouces) répondent à (4 toiſes, 2 pieds, 6 pouces ;) par proportion, 5 liv. 3 ſols 7 den. à quoi répondront-elles ?] dans laquelle le 1^r & le 2^d terme ſont de même eſpece ; de même que le 3e & le 4e : mais la métode ſuivante la réſout également ſous ces deux formes.

1^r EXEMPLE.

Si	coûtent	combien	*Réponſe.*
2 tol. 3 pi. 8 po.	5 liv 3 ſol 7 _	4 toi 2 pi. 6 po.	8 liv 15 ſol 3 de.
1^r *lieu.* C Si 188 pouces.	2^d *lieu.* C 5 liv 3 ſol 7 de.	3e *lieu.* C 318 pouces.	*rég. préparée* .....
D Si 94 pouces.	D 5 liv 3 ſol 7 de. 159	D 159 pouces.	*régle abrégée* .....

E 795 livres. E 477 ſols. E 1113 deniers

94 | 43 | 20 | 860 | 477 | 1337^f | 94 | 397 | 94 | 21 — 8 liv. F

21 | 42 | 1113 | 1365 | 94 | 425 | 94 | 49 — 15^d H

1337^f — 14^f G

Réduction en pouces.

2 toiſes	4 toiſes
6	6
12	24
3	2
15 pi.	26 pieds,
30	52
8	6
188 po A	318 po. B

Je commence donc par réduire le 1^r & le 3e lieu

de la premiere forme dans les moindres parties ſemblables ; ſçavoir icy chacun en pouces : (ſi l'un des deux contenoit des lignes, & l'autre ſeulement, ou des pieds, ou des pouces, ou même des toiſes, il faudroit alors réduire l'un & l'autre en lignes ; ce qui doit paſſer pour une régle génerale :) c'eſt ce ce qu'on trouve dans les deux colonnes A & B, conformément à ce que l'on a vû dans le chapitre précédent ; & je trouve pour le premier lieu de ma régle 188 pouces, & pour le 3e 318 pouces, dont je forme une nouvelle régle préparée en cette maniere ; [ſi 188 coutent (5 liv. 3 ſols 7 den.) combien par proportion doivent couter (318,] comme on le voit en C. enſuite regardant 188 & 318 comme des entiers, & prenant la moitié du 1r & du 3e lieu (188) & (318, ſçavoir (94 & (159 :) j'en faits encore une nouvelle réglè de proportion abregée ainſi : [Si (94) toiſes coutent (5 liv. 3 ſols 7 den. que couteront par proportion (159) toiſes, comme on le voit en D ; ce qu'il faut pratiquer toutes les fois qu'il ſe peut.

Enfin je réſous cette derniere propoſition en multipliant le ſecond lieu (5 liv. 3 ſols 7 deniers) par le 3e (159,) ce qui me donne pour produit (795 liv. 477 ſols 1113 den.) qu'on trouve en E, & que je diviſe par le 1r lieu 94. Le Quotient de cette diviſion qu'on voit en F, G, H, donne 8 liv. 14 ſols 15 den. ou plûtoſt (8 liv. 15 ſols 3 d.) pour la réponſe à la queſtion propoſée.

Quand on l'auroit propoſée ſous la 2e forme, il auroit fallu toujours procéder de même, en mettant en pouces le 1r & le 2d lieu, qui ſont en ce cas de même eſpece ; ce qui les auroit réduits encore à (188) & (318,) qu'on auroit rabaiſſez de même à (94) & (159,) ce qui auroit donné

une régle abregée : ſi [94 toiſes répondent à (159 toiſes,) par proportion (5 liv. 3 ſols 7 d.) à combien répondront-ils ?] Enfin multipliant (5 liv. 3 ſols 7 d.) par 159, & diviſant leur produit par 94, comme ci-deſſus, on auroit trouvé encore le même Quotient, comme il eſt évident : car comme dans ces régles, le produit des 2 lieux moyens eſt toûjours un Dividende, & le premier lieu toujours ſon Diviſeur, il eſt évident qu'il importe peu lequel de 2 lieux moyens ſoit le 2d ou le 3e lieu de la régle. On pourroit même ne faire qu'un ſeul de ces 2 lieux moyens, qui ſeroit celui du Dividende, le 1r étant celui du Diviſeur, & le 3e celui de la Réponſe. Mais comme la forme ſous laquelle on propoſe la queſtion, ſuppoſe ordinairement 4 lieux, il eſt bon de la réſoudre ſous cette forme.

Il eſt évident que ſi les 3 termes propoſez étoient de même eſpece, comme ſi l'on propoſoit de réſoudre cette queſtion, [Si (3 l. 5 ſ. 8 d.) ont produit (5 l. 8 ſ. 9 d.) par proportion que produiront (7 l. 6 ſols 11 deniers ?)] on pourroit alors prendre à ſouhait un des 2 lieux moyens, comme par éxemple le 2d pour le réduire avec le premier en deniers, à cauſe que ce ſecond eſt moindre que le 3e : alors la queſtion s'abregeroit naturellement ſous la 2e forme ; ainſi ſi [788 den. ont produit (1305 den.) par proportion que produiront (7 liv. 6 ſols 11 deniers ?] Multipliant donc (7 liv. 6 ſols 11 d.) par (1305,) & diviſant le produit par (788) comme ci-deſſus, on auroit au Quotient pour la réſolution deſirée (12 liv. 3 ſols 3 deniers.)

II. Si le premier lieu de la régle eſt l'unité, comme dans ce 2d exemple, où l'on propoſe cette queſtion; [Si 1 liv. a produit (25 liv. 3 ſols 8 den.)

par proportion combien produiront (12 liv. 5 ſ. 4 den.)

2d EXEMPLE.

Si	produit	combien	*Réponſe.*
1 livre	25 liv 3 ſol 8 de.	12 liv 5 ſol 4 de.	308 liv 18 ſol 3 de.
	12 liv 5 ſol 4 de.		

50 liv. | 36 ſ | 96 d | 44 d
25 | 125 | 100 | 64 d
8 | 17 ſ | 11 | 256
178 | 207 d } 17 | 256
20 } 8 liv | 12 | 2816 d de d.
87 | 24 0 } 11 d
12 | 41
308 liv. | 18 ſ | 3 d | 24
176 d de d.

Il eſt évident qu'il ne faudra que multiplier ſeulement le 2d & le 3e lieu de la régle entr'eux, comme on l'a enſeigné dans le 8e chapitre ci-devant: & la réduction des produits en entiers donnera la réponſe à cette queſtion, puiſque l'unité du 1r lieu, qui eſt le Diviſeur de la régle ne change rien dans le Dividende qui eſt le produit des 2 lieux moyens : car il eſt évident que 25 (par éxemple) partagez à 1, ou en 1, ou par 1, donnent toujours (pour Quotient 25.)

III. Si au contraire c'eſt le 3e lieu de la propoſition qui contient l'unité, comme ſi la queſtion eſt celle-cy. [Si (38 toiſes coûtent) 7 liv. 9 ſols 8 den.) par proportion quel eſt le prix de la toiſe ?]

3e EXEMPLE.

Si	coûtent	combien	*Réponſes.*
38 toiſes	7liv 9ſol 8de.	1 toiſe	0liv 3ſol 12den.

7 / 38 } 0liv. — 7 — 20 — 140 — 9 — 149d

149f / 38 } 3f — 35f — 70 — 8 — 428d

428d / 38 } 11d — 48 — 38 — 10d

Il encore évidẽt qu'il ne faut que diviſer tout d'un coup (7 liv. 9 ſ. 8 d.) par 38, comme on l'a enſeigné dans l'article 1r du chapitre précedent, en regardant le 1r & le 3e lieu comme des livres, de même que le 2d lieu. Le Quotient donnera pour réponſe à laqueſtion (3 ſols 11 den.) ſeulement; puiſque l'unité multipliant (7 liv. 9 ſols 8 den.) n'y apporte aucun changement.

Mais ſi le 1r lieu de la régle contenoit des entiers avec parties, comme (par éxemple) 38 toiſes, 3 pieds, 6 pouces; le 2d & le 3e demeurant toûjours les mêmes, il faudroit alors réduire le 1r & le 3e lieux aux moindres parties ſemblables; ſçavoir icy tous deux en pouces; ce qui donneroit la régle préparée, [Si 3278 pouces coutent 7 liv. 9 ſols 8 den. combien 72 pouces] qui ſe réduit à cette autre, en prenant les moitiez du 1r & du 3e lieu, [ſi 1639 liv. coûtent 7 liv. 9 ſols 8 den. combien 36 liv.] laquelle ſe réſout comme dans le 1r article ci-deſſus, & donne au Quotient 3 ſols 3 den.

IV. Enfin ſi le 1r & le 3e lieu de la régle étant toujours de même eſpece, contiennent cependant des parties differentes, (ce qui ne ſe trouve que

dans les aunages) comme si la question est telle: [Si 18 aunes trois quarts coutent 72 liv. 6 sols 4 den. combien par proportion couteront 26 aunes & 5 sixiémes?]

4e EXEMPLE.

A	Si 18 aunes. 3/4	c outent 72 liv 6 sol 4 de	combien 26 aunes 5/6	*Réponse.* 103 liv 9 s 10 d
B	18 9/12	72 liv 6 sol 4 de.	26 10/12	1re *form. prép*
	x8		x6	.....
	36		52	.....
	9	10		.....
C	Si 225 émes	coutent 72 liv 6 sol 4 de.	322 émes	2e *forme préparée.*
	xx		xx	
		322		

644 livres. 1932 sols. 1288 den.

x2254		9		87	
23184 liv.		20		174	
225	103 l.	180		1288	
0684		1932		2332 d	16 d
xx9		2112 s		225	
225		225	9 s	082	
009 liv.		87 s		225	

En ce cas il faudra commencer par mettre le 1r & le 3e lieu en même espece de parties, comme par exemple en entiers & douziémes; ce qui se fait en cherchant le nombre (12) qui se puisse diviser en 4 & en 6, à cause des 3/4 & des 5/6 de la régle; ce qui donne 18 aunes 9/12 pour le 1r lieu de la régle, & 26 aunes 10/12 pour le 3e, comme on le voit en B. après quoi il faut réduire ce 1r & 3e

lieu, tous en parties; ſçavoir ici en douziémes: ce qui donnera la régle préparée qu'on voit en C. [Si 225 douziémes coûtent (72 liv. 6 ſols 4 den.) que doivent couter par proportion (322 douziémes ?) ou laiſſant les dénominateurs (12) de part & d'autre.] [Si (225) donnent (72 liv. 6 ſols 4 den. que coûteront (322 ?)] laquelle eſt dans la forme du 1r article de ce chapitre, & étant réſoluë comme il eſt enſeigné dans cet article, donne pour réponſe à la queſtion (103 liv. 9 ſols 10 den.

Théorie.

V. Les deux formes de régles qu'on propoſe dans le 1r article, viennent de ce que l'on compare tantôt la marchandiſe du 1r lieu à ſon prix du 2d lieu, afin que la marchandiſe du 3e lieu donne un prix proportionnel au 4e; & tantôt la marchandiſe du 1r lieu à celle du 3e, afin que le prix de la 1re mis au ſecond lieu, donne pour la 2e un prix proportionnel au 4e: & cela ſans aucune raiſon particuliere, mais ſeulement ſelon que l'on trouve plus de facilité à une comparaiſon qu'à l'autre; ce que l'on doit bien obſerver, comme ayant lieu dans toutes les proportions.

La premiere comparaiſon ou proportion s'appelle Directe, & la 2e ſe nomme Alterne.

2. A l'égard de la réduction des deux lieux de même eſpece en mêmes parties, il eſt aiſé d'en voir la neceſſité. Car ſi l'on multiplioit le 3e lieu par le 2d (par éxemple) ſans réduire le 3e, on auroit dans le 1r éxemple pour produit, des toiſes, pieds, & pouces, qu'on ne pourroit diviſer par le premier Lieu, ſans réduire le tout, tant de part que d'autre, dans

les mêmes parties ; c'eſt pourquoy l'on abrége beaucoup l'opération, en réduiſant tout d'un coup le 1r & le 3e lieu en mêmes parties.

3. Quant à la pratique de la Régle qui eſt, de multiplier les 2 Lieux moyens entr'eux, & de diviſer leur produit par le 1r Lieu, pour avoir le 4e; elle eſt fondée ſur un principe général des proportions ; ſçavoir [*Que toujours le produit des deux Lieux moyens entr'eux égal au produit des deux Lieux extrêmes, c'eſt-à-dire du premier & du dernier entr'eux.*] Car d'autant que le produiſant moyen 4 toiſes, 2 pieds, 6 pouces augmente le produit des 2 Lieux moyens, pardeſſus celui des extrêmes, lorſqu'il eſt plus grand que le premier lieu (2 toiſes, 3 pieds, 8 pouces ;) d'autant en recompenſe le 4e lieu) 8 liv. 15 ſols 3 den.) augmente celui des extrêmes ſur celui des moyens, étant toujours d'autant plus grand que (5 liv. 3 ſols 7 den.) que (4 toiſes 2 pieds 6 pouces) le ſont plus que (2 toiſes, 3 pieds, 8 pouces.) Ainſi le même avantage qu'a le produit des moyens ſur celui des extrêmes par la 1re raiſon : celui des extrêmes l'a ſur celui des moyens par la 2e. [*Or deux nombres qui ont un avantage égal l'un ſur l'autre, ſoit pour ſe contenir, ſoit pour ſe ſurpaſſer, ſont certainement égaux.*] D'où il eſt évident qu'en toute proportion on peut prendre le produit des deux Lieux moyens pour celui des deux extrêmes. Or ce dernier produit étant diviſé par un des 2 Lieux extrêmes, comme par le 1r Lieu, rendroit certainement l'autre extrême ; ſçavoir le 4e Lieu. Donc auſſi le produit des Lieux moyens étant diviſé par le 1r Lieu, donnera le 4e deſiré. De plus, il eſt encore évident que le produit des 2 Lieux moyens étant diviſé par le 3e Lieu, rendroit le 2d, & que ce même produit étant diviſé par un nombre moin-

dre (par éxemple) que le 3e Lieu, comme icy par le 1r Lieu, rendra un Quotient d'autant plus grand que le 2d Lieu; que ce 1r Lieu eſt moindre que le 3e : ainſi on aura cette proportion. [D'autant que le diviſeur 2 toiſes, 3 pieds, 8 pouces eſt moindre que (4 toiſes, 2 pieds 6 pouces,) d'autant (5 liv. 3 ſols 7 den.) ſeront moindres que le quotient,] qui ſera par conſequent le 4e lieu déſiré 8 liv. 15 ſols 3 den. par proportion Alterne.

4. Enfin, à l'égard de la réduction de la régle marquée en D, elle eſt aiſée à voir. Car en réduiſant le 3e lieu 318 à ſa moitié 159, on fait la même choſe que ſi l'on avoit réduit le produit des moyens, qui eſt le Dividende à ſa moitié; mais comme en même-temps on réduit le Diviſeur 188 auſſi à ſa moitié, le quotient de la diviſion doit être encore le même, que ſi l'on n'avoit fait aucune réduction avant la multiplication & la diviſion.

CHAPITRE XI.

Des Régles de proportion inverſes & ſimples.

ART. I. SUppoſez que l'on ait cette queſtion à réſoudre [Si 12 hommes ont employé 8 jours & 5 heures à faire un certain ouvrage; combien par proportion 20 hommes doivent-ils employer de jours pour faire le même ouvrage?] Cette propoſition eſt bien encore une régle de proportion, mais elle eſt propoſée dans un ſens contraire aux précédentes. Car en comparant le 3e lieu (20 hommes) avec le 1r (12 hommes) ſelon la 2e forme du chapitre précédent, appellé Alterne,

aux précédentes

on trouve que d'autant que 20 hommes ſont plus que 12 hom. d'autant le 4e lieu que l'on cherche doit être moindre que le 2d, (8 jours 5 heures ;) au lieu qu'il devroit être d'autant plus grand, ſelon les régles de proportion droites ; c'eſt ce qui fait nommer celles que nous traitons, Inverſes ou Réciproques. On trouveroit de même que ſi le 3e lieu étoit moindre que le 1r qu'on ſuppoſe de même eſpece, le 4e devroit être d'autant plus grand que le 2d de même eſpece que lui. Pour rappeller donc ces ſortes de propoſitions à la forme des Régles de proportion droite, il ne faut que changer le 1r & le 3e lieu de place entr'eux ; c'eſt-à-dire écrire le 1r lieu au 3e, & réciproquement le 3e au 1r, & pourſuivre enſuite la réſolution, comme pour les Régles droites du chapitre précédent, ainſi qu'on le voit ci-deſſous.

1r EXEMPLE.

Regle inverſe. Si					
12 hom.	emploïent 8 jours, 5 h.		combien 20 hom.		*Réponſe.* 5 jo. 0 h. 36 m.
20 hom.	8 jours, 5 h.		12 hom.		*Regle redreſſée.*
5 jours,	hom. 8 5 h.		3 hom.		*Regle abregée.*

Réſolution.

3

24 jours, 15 heures.

5	4 jou.	63 heu.	12 he.	180	36 min.
4		5		5	
12		13		30	
48 heures.		5		5	
15		3 heures.		0	
63 heures.		60			
		180 minut.			

On ſuppoſe icy que les jours, ou plûtoſt les journées propoſées ſont chacunes de 12 heures; ce qui donne pour réſolution (4 jours, 12 heures & 36 minutes, dont l'heure en contient 60; & par conſequent auſſi (5 jours, 0 heures, 36 minutes, ou $\frac{3}{5}$ d'heures.

Ayant donc réduit le 1r & le 3e lieu 20 & 12, 5 & 3, qui en ſont les quarts, il reſte que de multiplier le ſecond lieu 8 jours 5 heures, par 3, & de diviſer le produit par 5.

On pourra s'exercer encore ſur les éxemples ſuivans, qui ſe réſoudront comme le précédent.

2d Exemple *à réſoudre.*

Lorſque le bled vaut 18 liv. on en a 5 meſures $\frac{1}{2}$ d'un certain païs pour un écu; on demande par proportion, lorſqu'il vaudra 21 liv. combien on aura des mêmes meſures pour le même prix d'un écu? Réponſe. (4 meſures $\frac{1}{7}$.

3e Exemple *à réſoudre.*

Lorſqu'on fait 2 lieuës $\frac{3}{4}$ par heure, on employe 15 jours & demi à faire un certain voyage en allant nuit & jour, on demande par proportion, lorſqu'on fera 3 lieuës & 1600 toiſes par heure (à 2400 tioſes la lieuë,) combien on employera de jours à faire le même voyage? *Réponſe.* (11 jours $\frac{1}{2}$.

4e Exemple *à réſoudre.*

Si ſuppoſant qu'on mette 2300 hommes dans une Citadelle, il y a des vivres pour les nourrir pendant 3 mois & 25 jours; on demande par proportion, ſi l'on y en met 4500, pour combien de temps auront-ils de vivres avec parêille Ration? *Réponſe.* Pour 1 mois & 29 jours environ.

5e EXEMPLE *à réſoudre.*

Si d'une monnoye qui vaut (11) pieces on en a 250 à changer ; d'une autre de même eſpece, mais qui vaut 15 des mêmes pieces, combien en faudra-t'il pour faire la valeur des 250 ? *Reponſe.* ($183\frac{1}{3}$.

Nous laiſſons ces éxemples à réſoudre aux commençans, pour les porter à opérer eux-mêmes.

Mais il faut remarquer ſur ce dernier éxemple, qu'on redreſſe ordinairement ces ſortes de queſtions de Change en les propoſant ; parce qu'on eſt naturellement perſuadé, qu'il en faudra (par éxemple) 15 des premiers, pour en faire 11 des dernieres ; c'eſt pourquoi l'on propoſe plus ſouvent cette queſtion ſous cette forme. [Si 15 des premieres eſpeces en valent 11 des dernieres, par proportion 250 des premieres, combien en vaudront-elles des mêmes ? *Reponſe.* ($183\frac{1}{3}$] Or il eſt évident que cette proportion eſt dans l'ordre d'une Régle de Trois directe, ainſi on n'a plus beſoin de la redreſſer.

On réſoud même encore ces mêmes queſtions de Change ſans leur donner la forme d'aucunes Régles de proportion droites ou inverſes. Car il eſt évident, qu'en multipliant le prix (11) de la monnoye à changer par la quantité 250 que l'on en a, on aura la valeur de la ſomme totale de monnoye, laquelle ſomme étant diviſée par la valeur (15) de l'eſpece deſirée, donnera au quotient le même nombre $183\frac{1}{3}$ qu'on doit en prendre.

Théorie des Régles inverſes.

Ces ſortes de proportions inverſes ayant leurs

lieux dans un ordre opposé à celui des droites, il est bien évident qu'il ne s'agit que de changer ces lieux à propos, pour les rappeller à l'état des Régles droites.

CHAPITRE XII.

Des Régles de Proportion droites & composées.

ART. I. SUppoſez que l'on ait cette queſtion à réſoudre, [Si 25 hommes en 8 jours travaillant 9 heures par jour, on fait 36 parties d'ouvrage, combien par proportion 15 hommes en 12 jours travaillant 8 heures par jour feront-ils du même ouvrage ?] On l'appelle une Régle de proportion compoſée, parce que le 1r & le 3e lieu de cette régle y comprennent pluſieurs chefs à comparer entr'eux ; ſçavoir icy des hommes, des jours, & des heures. De plus cette régle eſt droite, parce que moins d'hommes au 3e lieu qu'au 1r, donnent auſſi par proportion moins d'ouvrage au 4e qu'au 2d : au contraire plus de jours au 3e lieu, qu'au 1r, donnent encore plus d'ouvrage à proportion au 4e qu'au 2d : enfin moins d'heures au 3e lieu qu'au 1r, donnent au 4e moins d'ouvrage, qu'au 2d. D'où il ſuit que cette régle eſt droite dans toutes ſes parties ; ce qu'on doit bien obſerver. De plus on doit encore conſiderer ſi le 2d & le 4e Lieu particulierement ſont Omogenes, ou de même eſpece, comme ici, où tous deux ſont des toiſes. A l'égard des autres Lieux cela eſt indifferent, pourvû qu'on y ſupplée d'ailleurs ; comme dans cet éxemple, où l'on compare des journées de 9 heures du 1r lieu

avec des journées de 8 heures du 3e, mais comme on a égard à cette difference, en marquant le nombre des heures, tant de part que d'autre, l'Etérogénéité de ces 2 lieux eſt ſauvée par ce moyen.

1r EXEMPLE.

A	Si 25 hom. en 8 journ. à 9 heur.	ont fait 36 parties d'ouvrage,	combien 15 hom. en 12 jour. à 8 heur. feront-ils ?	*Réponſe.* $28\frac{4}{5}$ d'ouvrage.
	Regle compoſée.			
B	$25-5$ / $(18\phi\phi)8-1$ / $\phi-1$	36 / 4	$15\ 3$ / $12\ (12\phi\phi)$ / $8-1$	*Reduction.*
C	5	4	36	*Régle ſimple.* .....

Ayant donc arangé les termes de cette queſtion dans l'ordre propoſé ; ſçavoir tous les chefs de comparaiſon au 1r lieu, l'éxemple de la queſtion au 2d, & tous les chefs de la propoſition au 3e, comme on le voit en A & B,

4 *Réſolution.*

144 / 5 } $28\frac{4}{5}$

44 / 5

4

je rabaiſſe également chaque terme du 1r Lieu de la propoſition, avec quelqu'un du 3e pris indifferemment, ou même avec le 2d lieu, comme en B ; ainſi j'efface 8 au 1r & au 3e lieu, mettant l'unité en la place de chacun, ſeulement pour la remplir. De plus, je prens la 9e partie de 9 du 1r & de 36 du 2d ; ce qui les réduit à 1 & à 4 : Enfin rabaiſſe 25 & 15 du 1r & 3e lieu à 5 & 3 : je faits enſuite

ensuite un produit continuel de tous les chefs 5 & 1 du 1r lieu, disant [5 fois 1 font 5, & encore 5 5 fois 1 font 5;] & un autre de tous ceux du 3e, sçavoir 3, 13, & 1; disant 3 fois 12, font 36; 36 fois 1, font toujours 36; ce qui me donne (5) & (36) pour le 1r & le 3e lieu d'une nouvelle Régle de proportion simple & droite, qu'on voit en C, dont le 2d Lieu est le 2d lieu réduit (4) de la précédente B. Ayant donc résolu cette derniere régle C, comme dans les chapitres précédens, il vient au 4e lieu 28 parties d'ouvrage & $\frac{4}{5}$, pour réponse à la question proposée.

Il est bon de sçavoir qu'on peut aussi mettre le 3e lieu de ces regles au 2d, & le 2d au 3e, sans rien changer au reste; ce qui leur donne une nouvelle forme : ainsi [Si 25 hommes au premier lieu répondent à 15 hommes au 2d; & si 8 journées au 1r répondent à 12 au 2d : & enfin si 9 heures au 1r répondent à 8 au 2d; par proportion composée ou conjointe, à combien répondront 26 parties d'ouvrage, comme on le verra dans le 4e éxemple ci-après ?

2d EXEMPLE.

Si 36 liv. 15 sols 6 d. ont profité de 8 l. 5 sols 3 den. pendant 6 mois & 10 jours; on demande par proportion; de combien 75 liv. 3 sols 10 d. profiteront pendant 8 mois & 12 jours, sans mettre les interests à profit.

Régle composée.

A	Si 36 l. 15s 6d pour 6 m. 10 jo.	ont valu 8 l. 5s 3d	combien 75 l. 3s 10 d. pour 8 m. 12 j. vaudrõt-elles?	*Rep.* 22 l. 8 s. 1 d.
C	Si 8826 deniers en 190 jours	en valẽt 8 ₶. 5s 3d	comb. 18046d en 252 j.	*Préparation.*

D	Si 1471 d. 95 jo.	8 l. 5 f. 3 d.	9023 den. 42 jours	*Réduction* .....
	7355 13239		18046 36092	
E	*Régle ſimple.* 139745 d.	8 l. 5 f. 3 d.	378966 378966 den.	*Réponſe.* 22 l. 8 f 1 d

Pour réſoudre cet éxemple je l'arrange d'abord ſous la forme du 1r, comme on le voit en A. Je réduis enſuite tous les chefs, tant du 1r que du 3e Lieu dans les moindres parties ſemblables ; ſçavoir les livres, ſols & deniers en deniers, & les mois & jours en jours, à 30 jours chaque mois, comme on le trouve en B, ce qui me donne pour les chefs de comparaiſon du 1r Lieu 8826 deniers, & 190 jours ; & 18046 deniers, avec 252 jours pour les chefs de la propoſition du 3e lieu, deſquels je forme le 1r & 3e lieu d'une nouvelle régle preparée qu'on voit en C. laquelle a toujours pour ſon 2d lieu l'éxemple de ſa propoſition (8 l. 5 ſols 3 deniers.) Je rabaiſſe enſuite 8826 du 1r lieu, & 252 jours du 3e à 1471 deniers, & 42 jours, & 190 jours avec 18046 deniers à 95 jours, & 9023 deniers ; ce qu'on trouve en D. Enfin multipliant 1471 par 95 du 1r lieu conſiderés comme des livres, & 9023 par 42 du 3e, conſiderés de même, je trouve pour produit 139745, & 378966, dont je forme le 1r & 3e Lieu d'une nouvelle régle de proportion droite & ſimple, qu'on voit en E, dont le 2d Lieu eſt toujours l'éxemple de la queſtion (8 liv. 5 ſ. 3 den.) & cette derniere étant réſoluë, comme les précédentes, donne à ſon 4e Lieu (22 liv. 8 ſols 1 den.) pour réponſe à la queſtion.

3e EXEMPLE.

III. Si 120 aunes & $\frac{3}{4}$ d'étoffe, ayant chacune 1 aune $\frac{1}{3}$ de lay ou de largeur, mesurées avec une aune de 8 palmes ont habillé 50 hommes; combien par proportion 230 aunes $\frac{1}{6}$ ayant chacune $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{2}$ de lay mesurées avec une aune de 9 palmes en habilleront-elles à proportion?

	Si	ont habillé	combien	Rep.
A	120 au. $\frac{3}{4}$ ayant 1 au. $\frac{1}{3}$ de lay 8 palm. po. la longueur 8 palm. po. la largeur	50 hō- mes.	230 au. $\frac{1}{6}$ ayant $\frac{3}{6}$ & $\frac{1}{6}$ de lay 9 paumes po. la long. 9 palmes po. la largeur	79 hō- mes.
B	$120\frac{9}{12}$ 8 $1\frac{}{24}$ 8 8	50	$230\frac{2}{12}$ 21 $\frac{}{24}$ 9 9	*Prepa- ration.*
	120 240 9		220 460 2	
C	$161-\frac{1449}{161-32}$ 8 8	50	$2762-1381$ 21 $\frac{9-1}{9}$	*Reduc- tion.*
	128 768 128		1381 2762	
	20608 8		29001 9	

Règle ſimple.

D	Si 164864	50 hom.	261009	*Reponſe.* 79

J'arange d'abord cette queſtion dans l'ordre naturel, ſans rien tranſpoſer, parce qu'elle eſt droite en toutes ſes parties, comme on le voit en A : Je réduis enſuite ($\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{6}$ à ($\frac{9}{12}$ & $\frac{2}{12}$,) & ($\frac{1}{3}$ avec $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{2}$) quart à ($\frac{8}{24}$ & $\frac{21}{24}$) qui ſont des parties omogénes, écrivant toûjours 2 fois chaque expoſant (8) & (9) des 2 eſpeces d'aunes ; ſçavoir une fois pour la longueur de l'aune d'étoffe, & une autre pour ſa largeur, comme on le voit en A & B. Je réduis enſuite 120 $\frac{9}{12}$ & 230 $\frac{2}{12}$ à ($\frac{1449}{12}$) & ($\frac{2762}{12}$) effaçant les dénominateurs 12 & 12. Je réduis de méme 1 $\frac{8}{24}$ & $\frac{21}{24}$ à $\frac{32}{24}$ & $\frac{21}{24}$, effaçant auſſi les dénominateurs 24 & 24, comme on le trouve en C. Je prens enſuite indifferemment la 9e partie de 1449, & de 9 ; ſçavoir 161 & 1, & la moitié de 32, & de 2762, ſçavoir 16, & 1381, comme il paroît encore en C. Enfin je faits un produit continuel (164864 des termes reſtans 161, 16, 8, 8, du 1r lieu, & un autre (261009) des termes reſtans 1381, 21, 1, 9 du 3e, dont je forme une régle de proportion ſimple. que l'on voit en D, laquelle a toujours pour 2d lieu l'éxemple propoſé 50 : & ces 2 produits 164864, & 261009 pour 1r & 3e lieu ; & laquelle étant réſoluë à l'ordinaire, donne pour réponſe à la queſtion (79 hommes.)

4e EXEMPLE,

appellé ordinairement Regle conjointe droite.

Si 10 Entiers de Paris (toiſes, pieds, aunes, pieces &c.) en valent 15 d'Amſterdam, & ſi 25 d'Amſterdam en valent 12 de Londres, enfin ſi 30 de Londres

en valent 9 de Vienne, combien 24 Entiers de Paris en vaudront-ils de Vienne par proporion composée ?

Préparation.

Si 10 de Paris	15 d'Amſ.	24 de Paris	*Rép.*
Si 25 d'Amſt.	valent 12 de Lon.	combien	$5\frac{23}{125}$
Si 30 de Lon.	9 de Vien	de Vien?	
~~10~~—~~2~~—1	~~15~~—3		*Regle reduite.*
25	~~12~~—6	24	
~~30~~—10	~~9~~—3		
250	54	24	*Regle de* ~~*Troiſiéme*~~ trois Simple

Reſolution

$$\begin{array}{r} 216 \\ 6 \\ \hline 1296 \\ 250 \\ \hline 46 \end{array} \left\{ 5\frac{\cancel{46}}{\cancel{250}} \right. \qquad \left. 5\frac{23}{125} \right\}$$

Théorie.

25	25	25--	--15
8	8--	--12	12
9--	—8	8	8
1800	1600	2400	1440
1r prod.	3e prod.	4e prod.	2d prod.

Pour entendre la pratique de ces régles, il faut bien comprendre l'état de la queſtion, qui eſt dans la premiere forme ; de trouver un 4e lieu par le moyen d'un ſecond, (que nous appellons à cauſe de cela l'Exemple de la propoſition ;) & cela par la comparaiſon de chaque chef du 1r lieu, avec chaque chef du 3e. Ainſi on demande que la comparaiſon des 36 parties d'ouvrage du 2d Lieu du 1r éxemple, avec les 28 $\frac{4}{5}$ du 4e lieu, renferme non ſeulement la comparaiſon des 25 hommes du

1r, avec les 15 du 3e; mais encore celle des 8 jours du 1r avec les 12 du 3e, & encore celle des 9 heures du 1r lieu, avec les 8 du 3e. Car il eſt évident, que ſi l'on manquoit de renfermer quelques-unes de ces comparaiſons dans la comparaiſon du 2d lieu avec le 4e; on ne ſatisferoit pas entierement à la queſtion, laquelle ne roule que ſur ces raports, comme on l'a vû à la fin du 1r éxemple article 1r. Or c'eſt ce que l'on a fait par la pratique que l'on a ſuivie, comme on peut en faire l'épreuve. Car il eſt certain que [ſi 9 heures du 1r lieu donnent 8 au 3e; 36 parties au 2d doivent en donner (32) au 4e par proportion,] & de plus que [ſi 8 jours du 1r lieu donnent 12 jours au 3e, par proportion encore ces 32 parties miſes au 2d doivent donner 48 au 4e. Enfin [ſi 25 hommes au 1r lieu répondent à 15 au 3e, encore par proportion ces 48 mis au 2d doivent répondre à $28\frac{4}{5}$, (puis qu'ajoutant à $28\frac{4}{5}$ (ou plutoſt à $27\frac{2}{5}$) ſes $\frac{2}{5}$, ſçavoir ($18\frac{6}{5}$) il vient 48 ;) ce qui fait voir manifeſtement par cet éxemple, que le raport des 36 parties du 2d lieu aux $28\frac{4}{5}$ du 4e comprend en lui les raports des hommes aux hommes, des jours aux jours, & des heures aux heures du 1r & 3e Lieu.

Il ne reſte donc plus que de faire voir, qu'en général le produit réduit (5) des conditions du 1r Lieu de la régle ſimplifiée, comparé au produit réduit (36 du 3e, comprend équivalemment les raports de tous les chefs du 1r Lieu, comparez à tous ceux du 2d, qui ſont de même eſpece.

Pour y parvenir, je prends le produit continuel non réduit (1800) de toutes les conditions du 1r lieu, & le produit continuel non réduit 1440 de toutes celles du 3e. Et je faits voir d'abord que ces 2 produits comparez entr'eux, renfermen

toutes les comparaiſons des conditions du 1r Lieu, avec celles du 3e. Car ſi pour comparer les heures avec les heures, l'on fait un 3e produit continuel 1600 des 25 hommes & des 8 jours du 1r Lieu & des 8 heures du 3e, il eſt aiſé de voir que le 1r produit non réduit (1800 aura même rapport à ce 3e (1600,) que (9 heures à 8 heures,) l'un étant le produit de 9. par 200, & l'autre de 8 auſſi par 200, [*& 9 fois 200 ayant même raport à 8 fois 200, que 9 à 8, & de même de toutes les autres équimultiplications*] De même ſi pour comparer les jours aux jours, on fait un 4e produit continuel (2400) des 25 hommes & des 8 heures du 3e produit 1600 liv. & des 12 heures du 3e lieu, le 3e produit (1600) aura même raport à ce 4e 2400 que (8 journées à 12 journées,) l'un étant le produit de 200 par 8, & l'autre auſſi de 200 par 12. Enfin ce quatriéme produit 2400 comparé au ſecond 1440 aura alors même raport avec lui, que (25 hommes à 15 hommes,) l'un étant encore le produit de 25 par 96, & l'autre de 15 auſſi par 96, comme on va le prouver. On aura donc entre les deux produits non réduits (1800) & (1400) les trois raports propoſez de (9 heures à 8 heures,) de 8 jours à 12 jours,) & de (25 hommes à 15 hommes.) D'où il ſuit que l'on peut au lieu de la régle propoſée, former cette régle ſimple: Si [800 hommes ont fait 36 parties d'ouvrage, combien par proportion compoſée 1440 hommes feront-ils?] & le 4e terme de cette régle préparée ſera la réponſe à la queſtion. Mais on a vû dans les chapitres précédens, qu'il eſt permis de rabaiſſer le 1r lieu (1800) avec chacun des ſuivans (36 & 1440) toutes les fois que cela ſe peut; d'autant que par ce moyen le Diviſeur & le Dividende de la régle ſe trouvent également

rabaiſſez. Mais au lieu de compoſer 1800 & 1440 pour rabaiſſer enſuite le même 1800, avec 36 & 1440, il eſt bien plus court de rabaiſſer les multiplicateurs de 1800, avec 36, & avec ceux de 1440, puiſque d'ailleurs cela produit toujours le même effet. Car effacer 8 de part & d'autre, comme la réduction le demande, n'eſt autre choſe que changer le diviſeur & le dividende naturels 1800 & 1440 en deux autres, qui n'en ſont que la 8e partie chacun, & qui par conſequent ont encore même raport entr'eux, que 1800 & 1440; de même prenant la 9e partie du multiplicateur 9 du 1r lieu, & de 36 du 2d, ce n'eſt encore autre choſe que changer ces nouveaux diviſeur & dividende de la premiere réduction en deux autres, qui ſont chacun la 9e partie des précédens, & qui par conſequent ont toujours même raport entr'eux, qu'eux. Enfin prenant la 5e partie de 25 & de 15 du 1r & 3e lieu, c'eſt changer encore ces derniers diviſeur & dividende de la 2e réduction en 2 nouveaux qui conſervent toujours entr'eux le même raport que tous les précédens. Donc le quotient de chacun de ces Dividendes, diviſez par leurs Diviſeurs ſera toujours le même que celui du 1r Dividende naturel 1440, diviſé par ſon Diviſeur naturel 1800; c'eſt-à-dire que ce dernier Quotient réduit, ſera le 4e terme déſiré de la régle de proportion compoſée.

A l'égard de ce qui nous reſte à prouver, ſçavoir que 2400 eſt également le produit de 8 fois 25, ou de 200 par 12; ou le produit de 25 par 8 fois 12, ou 96, cela vient de la compenſation qui ſe trouve dans ces deux opérations. Car ſi en comparant le 1r Multipliende 8 fois 25, ou 200 au 2d multipliende 25, on trouve que le 1r produit devroit contenir 8 fois le 2d, en recompenſe ſi l'on

compare le 1r multiplicateur 12 au 2d 8 fois 12, ou 96, on voit que le 2d produit doit auſſi contenir le 1r 8 fois. Donc ces 2 produits ont l'un ſur l'autre un avantage égal ; donc ils ſont parfaitement égaux. On prouvera de même, que le même nombre 2400 eſt encore le produit de 8 par 25 fois 12. Car ſi en comparant le 1r multipliende (8 fois 25) au 3e 8, on trouve que le 1r produit doit contenir le 3e 25 fois ; en recompenſe en comparant le 1r multiplicateur 12 au 3e (25 fois 12,) on trouve que le 3e produit doit auſſi contenir le 1r 25 fois ; ainſi le 1r & le 3e produit ont encore un avantage égal l'un à l'égard de l'autre ; donc ils ſont encore égaux. D'où l'on doit tirer ce principe général de l'Arithmetique. [*Que pluſieurs nombres eſtant multipliez entr'eux en quelque ordre que ce ſoit, donnent toujours le même produit :*] ce que tout le monde accorde volontiers ; mais dont peu ſçavent la véritable raiſon.

CHAPITRE XIII.

Des Régles de Proportion compoſées & inverſes.

ART. I. SI 25 hommes travaillant chaque jour 9 heures, pour faire 36 parties d'ouvrage, ont employé 8 journées, combien par proportion 15 hommes, travaillant chaque jour 8 heures, pour faire 28 parties d'ouvrage & $\frac{4}{5}$ ſeront-ils de jours ?

1r EXEMPLE.

A	Si 25 hom. à 9 heures par jour, pour 36 parties [redacted] d'ouvrage	ont employé 8 journées,	combien 15 hommes à 8 he. par jo. po. $28\frac{4}{5}$ parties d'ouvrages, employeront-ils de jours ?	*Reponse* 12 jou.
B	Si 3-15 ho. 1-36 d'ou.	72 he. 2	5—25 hom. $28\frac{4}{5}$ d'ouvrage.	*Régle prep. & réduite.*
C	Si 3 1	2	$140 - \frac{20}{5}$ ou $\frac{144}{48}$	96 h. *Reg. simp.*

Ayant arangé les termes de cette question comme dans les chapitres précédens, sçavoir toujours les chefs de comparaison au 1r lieu, l'éxemple de la question au 2d, & les chefs de la proposition au 3e, comme on le voit en A. Je trouve que moins d'hommes au 3e Lieu qu'au 1r demandent plus de jours au 4e Lieu qu'au 2d : c'est pourquoy je change ces hommes de place, comme dans les régles de proportion inverses du chapitre 11 cy-devant : ce qu'on voit en B. Comparant ensuite l'ouvrage du 1r Lieu avec celui du 3e, je trouve que moins d'ouvrage au 3e lieu qu'au 1r demande moins de jours au 4e lieu qu'au 2d, d'ou je conclus que la régle est droite dans cette comparaison ; ainsi je ne change point les ouvrages de place. A l'égard des heures, je vois que les journées du 2d lieu sont de 9 heures, & que celles qu'on demande au 4e ne sont que de 8 ; ainsi ces journées n'étant pas omogènes, ou de même espece, ne sçauroient être comparées entr'elles, qu'en les réduisant en heures. Je fais donc des 8 journées à 9 heures du 2d lieu ; 72 heures que je prens pour le

2d lieu de la régle préparée, au lieu de 8 journées; & je ne parle plus davantage des 9 heures du 1r lieu, ni de celles du 3e que j'efface. Je rabaiſſe enſuite 15 & 25 hommes à 3 & 5; & 36 parties d'ouvrage avec 72 heures à 1 & 2. Enfin je fais un produit des conditions reſtantes 3 & 1 du 1rlieu, ſçavoir (3) & un autre de celles du 3e, que je prens pour 1r & 3e lieux d'une régle de proportion droite & ſimple, qu'on voit en C, laquelle a pour 2d lieu les 2 heures venuës de la réduction de 72 heures de la régle préparée B; & prenant encore le tiers de 3 & de 144, ſçavoir 1 & 48; toute la propoſition ſe réduit à la ſimple régle de 3 directe. [Si (1) donne (2 heures,) que donneront (48;] & comme on voit tout d'un coup la réponſe, ſçavoir (96 heures,) il eſt évident que ce cas ſe réſout par de ſimples préparatifs; mais c'eſt icy un accident qui n'arrive pas ſouvent. Ayant les (96) heures déſirées, il eſt manifeſte qu'il ne reſte que de les diviſer par le nombre d'heures de la journée propoſée, ſçavoir icy par (8,) le quotient donnera les (72) journées que l'on ſouhaite. Ce ſera la même choſe pour tous les autres éxemples qu'on peut propoſer.

Preuve des Proportions compoſées.

L'on peut remarquer icy que ces régles inverſes ſervent de preuve aux régles compoſées droites du chapitre précédent, & réciproquement celles-là en ſervent à celles-cy; & cela en ſe ſervant des mêmes chefs pour la preuve que pour la proportion, & faiſant ſeulement tomber la queſtion ſur un chef qui ſoit different du 4e lieu de la régle propoſée, & qui la rende droite quand

elle eſt inverſe, ou inverſe quand elle eſt droite. Ainſi dans le 1r exemple du chapitre précédent, dont les termes ſont préciſément les mêmes, que de l'exemple de ce chapitre, on fait tomber la queſtion ſur l'ouvrage, au lieu que dans celuy-ci elle tombe ſur les jours; ce qui la rend inverſe. Et ce qui rend les mêmes 12 jours de la régle droite du chapitre précédent, qui avoient ſervi à trouver l'ouvrage $28\frac{4}{5}$ de celui-cy.

On pourroit de même faire tomber la queſtion ſur les hommes, ainſi.

2d EXEMPLE *à reſoudre.*

[Si pour faire 36 parties d'ouvrage, en travaillant 8 journées à 9 heures chacune, il a fallu 25 hommes; par proportion pour faire $28\frac{4}{5}$ parties d'ouvrage en 12 jours à 8 heures par jour, combien faudra-t'il d'hommes?] qui eſt encore une régle inverſe, laquelle rend à ſon 4e lieu les 15 hommes du 3e lieu des 1res, ſans qu'il ſoit neceſſaire de changer dans cet exemple les jours en heures; parce que les 9 & 8 heures du 1r & 3e lieu ſauvent l'étérogénéité des jours, comme on l'a dit dans le 1r article du chapitre précédent.

Enfin on pourroit encore faire tomber la queſtion ſur les heures, ainſi.

3e EXEMPLE *à reſoudre.*

[Si pour faire 36 parties d'ouvrage, 25 hommes travaillant pendant 8 jours, ont employé chaque jour 9 heures; par proportion combien 15 hommes pour faire $28\frac{4}{5}$ parties d'ouvrage en 8. jours doivent-ils employer d'heures par chaque jour?] ce qui donne encore une régle inverſe, dont le 4e lieu doit contenir les 8 heures du 3e lieu de la droite, ſi l'on ne s'eſt point trompé; ce que cha-

cun doit éprouver ſoi-même pour s'éxercer, & pour acquerir de l'habitude.

4e Exemple.
Ou Régle conjointe inverſe.

Si 10 Entiers de Paris ſont égaux à 15 d'Amſt. & ſi 25 d'Amſterd. en valent 12 de Londres : Enfin ſi 30 de Londres ſont équivalens à 9 de Vienne ; par proportion compoſée combien 5 & $\frac{23}{125}$ de Vienne en vaudront-ils de Paris ?

A Si	15 d'Amſt. / 12 de Lon. / 9 de Vien.	10 de Paris / 25 d'Amſ. / 30 de Lion	$5\frac{23}{125}$ de V. comb. en valent-ils de Paris ?	*Reponſe.* 24 *Regle prep.*

B Si	$15 - 3 - 1$ / $12 - 4 - 21$ / $9 - 1$ valent	$10 - 21$ / 25 / $30 - 10$	combien $648\ 72$ / $225\ 225$ / $\frac{12}{125}$	*Regle abregée.* 24

C Si	$225 \quad 1$ / 225	valent $225 - 2$	combien 12 / 225	*Regle ſimple* 24

Il eſt aiſé de voir que dans cet éxemple, ſon 3e Lieu ($5\frac{23}{125}$) devroit être le 4e, & ſon 4e le 3e, afin que cette régle fût ſous la forme de la régle droite conjointe du 4e éxemple du chapitre précédent. Ces deux lieux étant donc dans un ſens renverſé, il eſt évident qu'on doit changer auſſi de place entr'eux le 1r & le 2d Lieu (qui ſe répondent toujours) comme on le voit en A, afin d'y pouvoir appliquer le raiſonnement des régles droites ; ſçavoir [Si 10 de Paris valent 15 d'Amſterdam ; ſi 25 d'Amſterdam valent 12 de Londres, & ſi 30 de Londres valent 9 de Vienne, 24 de Paris vaudront $5\frac{23}{125}$ de Vienne.]

A l'égard du préparatif de cette régle, je mets

($5\frac{23}{125}$) en 125emes ; ce qui me donne $\frac{648}{125}$; rabaiſſant donc (15. 12. 9.) avec (10. 25. 30. & 648) comme en B, il reſte ſeulement (1. 1. 1) au 1^r Lieu ; (1. 25. 10) au 2^d, & $\frac{12}{125}$ au 3e. Je mets donc 1, ou plûtoſt ($\frac{125}{125}$) au 1^r lieu de la régle en C ; 250 au 2^d, & $\frac{12}{125}$ au 3e, & effaçant les dénominateurs 125 du 1^r & 3e Lieu, je réduis leurs numérateurs à 1 & 2 : ce qui donne la régle ſimple [Si 1 répond à 2 ; à quoi répondront 12 :] il vient au 4e terme les 24 de la régle droite déſirez.

Théorie.

Ces régles inverſes n'ont pas beſoin d'une plus ample explication que les inverſes ſimples ; puiſqu'on ne fait autre choſe dans les unes & les autres, que changer de place les chefs qui empêchent qu'on n'y applique le raiſonnement des régles de proportion droites, afin qu'après ce changement ce raiſonnement puiſſe leur convenir ; c'eſt-à-dire qu'elles deviennent par ce moyen de veritables proportions directes.

CHAPITRE XIV.

Des Régles de Societé Simples.

ART. I. TRois perſonnes ont fait une Societé, dans laquelle le premier a mis 25, le ſecond 18, & le 3e. 34 : avec cette Miſe ils ont profité au bout d'un temps de (56,) tous frais payez ; il s'agit de partager ce Gain à chacun des Aſſociez proportionnellement à ſa miſe.

1r EXEMPLE.

A *miſe totale.*	B *miſes particulieres*	C *profit total.*	D *gains particuliers.*
77	25	88	$18\frac{2}{11}$
11	18	8	$13\frac{1}{11}$
	34		$24\frac{8}{11}$
	77		$88\frac{11}{11}$ } 2

Pour le 1r		*Pour le 2d*		*pour le 3e*	
25		18		34	
8		8		8	
200	$18\frac{2}{11}$	144	$13\frac{1}{11}$	272	$24\frac{8}{11}$
11		11		11	
90		34		52	
11		11		11	
2		1		8	

Réſolution.

Pour réſoudre cette queſtion, j'écris la miſe de

chaque associé dans une même colonne B, qui doit être le second Lieu d'une espece de régle de proportion, qu'on peut appeller Complexe; parce qu'elle en renferme plusieurs autres. Je fais ensuite une somme de toute cette colonne, sçavoir icy (77) que j'écris au 1r lieu de la Régle en A; effaçant cette somme en B, & j'écris au 3e le Profit ou Gain total 56 en C, que je rabaisse avec le Sort principal 77, autant qu'il se peut, sçavoir ici à 8 & 11. Ce préparatif général étant fait, je fais une régle de proportion droite avec le Sort principal (11;) avec la mise de chaque Associé (25, 18, 34,) & le Profit (8) en cette maniere. [Si 11 donnent 8, que donnera la mise 25 du 1r Associé? Le 4e terme donnera ($18\frac{2}{11}$) pour la part de profit du 1r.] Ensuite [Si 11 donnent 8, que donnera la mise 18 du 2d, il viendra au 4e terme la part du gain du 2d de ($13\frac{1}{11}$?] Enfin si 11 donnent 8 que produira la mise 34 du 3e? La réponse donnera ($24\frac{8}{11}$) pour, sa part du profit.

Et pour faire la preuve de cette régle, je fais une somme des 3 parts de profit échûës, laquelle se trouve être 56, de même que le Profit total: d'où je conclus que l'opération est du moins moralement bonne: car absolument parlant la preuve pourroit être vraye, & l'opération fausse, par une compensation fortuite entre les parts fausses des Associez.

II. Dans une succession un premier héritier à hérité de (56 livres 8 sols 6 den.) un second de (27 liv. 5 sols 4 den.) & le 3e de (63 liv. 15 sols 10 den.) Les dettes de la succession se montent à (36 liv. 17 sols 5 den.) On demande la part des dettes que chacun doit payer, à raison de la part dont il a hérité.

2d EXEMPLE.

2d EXEMPLE.

A	B	C	D
mise totale.	*mises particulieres.*	*dette totale.*	*dettes particulieres.*
147# - 9s - 8d	56# - 8s - 6d	36# - 17s - 5d	14# - 2s 1d ½
	27 — 5 — 4		6# - 16 - 4
~~35396~~d	63 -- 15 - 10	~~8849~~d	15# - 18 - 11 ½
(4)	~~147~~# - ~~9~~s - ~~8~~d	(1)	36# - 17s 5d

Résolution.

pour le premier.	*pour le second.*	*pour le troisiéme.*
56# — 8s -- 6d	27# — 5s -- 4d	63# — 15s — 10d
4 { 14# - 2s - 1d ½	4 { ~~6~~# ~~16~~s - ~~4~~d	4 { 15# 18s 11 ½
16	3 { 1	23 { 3
4	20 { 2	4 { 6
8 { 2s	60 { 4	3 { 0
4	5 { 16 { ~~4~~d	20 { 46 { ~~11~~d ½
6 { 1d	65 { ~~16~~s	60 { 44
4	4	15 { 12
2	25	75 { ~~18~~s
	4	4
		35
		4

Pour résoudre cet éxemple, ayant premierement fait une somme de la part de succession de chaque Associé écrite dans la colonne B, sçavoir 147 l. 9 s. 8 d. je transporte cette somme au 1r lieu A de la Régle de la societé, & je mets le Total des dettes au 3e lieu G. Je réduits ensuite par régle generale le 1r

& 3e lieu A & C en deniers, qui ſont leurs moindres parties, ſçavoir en 35396 den. & 8849 den. comme on l'a enſeigné dans les chapitres précedens; ſans toucher au ſecond Lieu, après quoi je rabaiſſe (35396) & (8849) à (4) & (1,) ſuivant la régle generale du 1r article, & je réſous les 3 Régles de proportion ſuivantes [Si le Total de la ſucceſſion (4) donne le Total des dettes (1;) que donnera la part de ſucceſſion du 1r heritier 56 l. 8 ſ. 6 den.) le 4e Lieu donnera (14 l. 2 ſ. 1 den.) pour ſa part des dettes.] Enſuite [Si (4) donne (1) que donnera la part de ſucceſſion du ſecond heritier (27 l. 5 ſ. 4 d.) il viendra au 4e Lieu pour la part des dettes du ſecond (6 liv. 16 ſ. 4 d.] Enfin [Si (4) donnent (1) que donnera la part de ſucceſſion du 3e heritier (63 liv. 15 ſols 10 d?) La réponſe 15 liv. 18 ſols 11 den.) ſera la part des dettes qui convient au 3e;] & chacune de ces régles ſe réſoudra par une ſeule diviſion de livres, ſols & deniers par l'entier (4,) à cauſe que le ſecond terme eſt l'unité; ce qui n'arrive ici que par hazard.

III. S'il y avoit de la perte, au lieu de gain, il eſt évident qu'il faudroit la repartir ſur tous les Aſſociez par proportion à la miſe de chacun, comme on fait le gain & les dettes. Et pour cet effet (tous les frais étant déduits,) il faut mettre ſeulement ce qui reſte dans la Caiſſe, au 3e lieu C de la Régle de Societé, & faire autant des Régles de proportion, avec la miſe totale, la miſe de chaque Aſſocié, & le Reſtant de la Caiſſe ou du Fond, qu'il y a d'Aſſociez; il viendra au 4e Lieu de chaque réglé de Trois particuliere, ce que chaque Aſſocié doit retirer de ſa miſe particuliere; & par ce moyen les frais & la perte ſe trouvent en même-temps repartis ſur les Aſſociez proportionnellement à

leur miſe particuliere, ſans qu'il ſoit neceſſaire de s'en embaraſſer davantage.

Suppoſez comme dans le 1r éxemple que le 1r aſſocié ait mis 25, le ſecond 18, le 3e 34; ce qui fait en tout 77 liv. & que tout compté fini, ce qui reſte à la Caiſſe ſoit 44 liv. je mets ces 44 liv. au 3e lieu de la Régle de ſocieté, ainſi.

3e EXEMPLE.

miſe tot.	*miſ. part.*	*fond reſtant.*	*Recouv. particuls*
	25		$14\frac{2}{7}$
77	18	44	$10\frac{2}{7}$
7	34	4	$19\frac{3}{7}$
	77		44

Réſolution.

Si 7 dõnent 25, comb. 4. *Rép.* $14\frac{2}{7}$ pour le 1r
Si 7 dõnent 18, comb. 4. *Rép.* $10\frac{2}{7}$ pour le 2d
Si 7 dõnent 34, comb. 4. *Rép.* $19\frac{3}{7}$ pour le 3e

Pour le 1r	*Pour le* 2d	*Pour le* 3e
25	18	34
4	4	4
100	72	136
7	77	7
$14\frac{2}{7}$	$10\frac{2}{7}$	$19\frac{3}{7}$
30		66
7		7
2		3

Et ayant rabaiſſé le 1r lieu 77, & le 3e 44, à 7 & 4, je réſous les 3 régles de proportion comme ci-devant; ce qui me donne ($14\frac{2}{7}$) pour ce que le 1r aſſocié doit retirer, (au lieu de 25 qu'il avoit mis;) ($10\frac{2}{7}$) pour le 2d, au lieu de

ſa miſe de (18 ;) & $19\frac{3}{7}$ pour le 3e, au lieu de ſa miſe (34.)

Théorie.

IV. Pour entendre la raiſon de la pratique des régles de ſocieté, il faut conſiderer ce qui eſt en queſtion, ſçavoir de trouver dans le 1^{r} éxemple 3 parts de Gain ($18\frac{2}{11}$) ($13\frac{1}{11}$) & ($24\frac{8}{11}$) qui ayent même rapport entr'elles, que les 3 parts de miſe (25) (18) & (34,) qui leur répondent ; & dont la ſomme ſoit égale au gain total (56.) Ainſi il ne s'agit que de prouver, que la pratique que nous avons donnée fait ces deux choſes en même-temps.

Premierement il eſt évident que ſuivant cette pratique, les trois produits de chaque miſe 25, 18, 34, par le Gain total 56 ſeront chacun égaux aux trois produits correſpondans de chaque Gain particulier ($18\frac{2}{11}$) ($13\frac{1}{11}$) ($24\frac{8}{11}$) par la miſe totale (77,) comme on l'a démontré dans la Théorie des régles de proportion, chapitre 10, art. 3. Or les trois premiers produits ont même rapport entr'eux, que les nombres ſimples 25, 18, 34 ; & les 3 derniers ont même rapport entr'eux que les ſimples multiplians ($18\frac{2}{11}$) ($13\frac{1}{11}$) & ($24\frac{8}{11}$,) comme on l'a enſeigné ci-devant. Donc auſſi les trois parts de profit ($18\frac{2}{11}$) ($13\frac{1}{11}$) & ($24\frac{8}{11}$) ont même rapport entr'elles, que les 3 parts de miſe (25, 18, 34.)

Secondement il eſt encore évident que c'eſt la même choſe de multiplier le profit total 56 par chaque part de miſe 25, 18, 34, pour diviſer enſuite chaque produit par la miſe totale 77, & faire après cela une ſomme des 3 quotiens ; que de

faire tout d'un coup une ſomme des 3 multipliants (25, 18, 34) pour la multiplier par le même profit total 56, & diviſer le produit par le même Sort principal 77, [*Puiſque c'eſt la même choſe d'opérer ſur le tout, que ſur ſes parties.*] Or cette derniere opération rendroit certainement au quotient le gain 56, puiſque la ſomme des trois nombres (25, 18, & 34) eſt égale au diviſeur 77.) Donc auſſi la premiere opération doit rendre le même gain total 56, d'où l'on a tiré la preuve de l'Article 1.

A l'égard des articles 2 & 3, ils ne me paroiſſent pas renfermer aucune difficulté, puiſqu'il eſt juſte [*Que les coheritiers ou Aſſociez ſoient concurrens, ou compagnons de la mauvaiſe, comme de la bonne fortune :*] & que ſi l'un d'eux, au lieu de retirer du profit de la ſocieté, ne recouvre (par exemple) que le tiers de ſa miſe; chacun des autres, par droit d'équité, ne retire auſſi que le tiers de la ſienne. Ou ce qui eſt le même; ſi le premier perd les $\frac{2}{3}$ de ce qu'il a mis en ſocieté, chacun des autres Aſſociez doit perdre auſſi les $\frac{2}{3}$ de ſa miſe. Or c'eſt ce que notre pratique donne infailliblement : Et quand même il ne reſteroit rien à la Caiſſe, la négociation étant finie, & que même la ſocieté ſe trouveroit redevable pour les emprunts, il faudroit toujours mettre le total de cette dette au 3e lieu de la régle de ſocieté, pour le repartir aux aſſociez proportionnellement à la part de miſe de chacun.

On peut abreger tout ce diſcours, en diſant; Que chaque part de gain, ou de perte, ou de dette, doit avoir même rapport au gain ou à la perte, ou à la dette totale; que chaque part de miſe ou de ſucceſſion particuliere, à la miſe, ou à la ſucceſſion totale. Or c'eſt ce que donnent préciſé-

ment les régles de proportion particulieres, par lesquelles on rêsout celles de societé : d'où il faut conclure, que cette pratique emporte necessairement aussi avec elle les deux conditions proposées ci-dessus ; [*la verité ne pouvant être contraire à la verité.*]

CHAPITRE XV.

Des Régles de Societé composées, ou avec differens temps & differentes classes.

ART. I. TRois hommes ayant fait Societé, le premier a mis (15 liv. 5 sols 8 d.) pour demeurer seulement 3 mois & 8 jours en societé avec les 2 autres ; le second a mis (12 l. 4 s. 6 den.) pour y demeurer 4 mois & 6 jours ; & le 3e a mis (28 liv. 7 sols 9 den.) pour y trafiquer ou négocier pendant 5 mois & 15 jours ; au bout desquels, tous frais payez, le profit s'est trouvé de (10 liv. 5 sols 3 den.) on demande quelle part chaque Associé doit retirer de ce profit, par proportion à l'argent qu'il a mis, en societé & au tems pour lequel il a negocié.

1r EXEMPLE.

	~~359464~~—89866		*Réponse.*
463323	~~369684~~—92421	10tt-5s-3d	1tt 19s 9d
	~~1124144~~-281036		2—0-11
A	B ~~463323~~	C	6—4--6
mise comp. totale.	*mise compl. particul.*	*profit total*	D *prof. part.*

Pour répondre à cette question, je réduis l'ar-

gent de chaque Aſſocié dans les moindres parties, comme icy en deniers : ce qui donne 3668 deniers pour la miſe du 1r, 2934 deniers pour celle du ſecond, & 6813 den. pour celle du 3e. Je réduis auſſi le temps de chacún dans ſes moindres parties ; ſçavoir à 98 jours pour le 1r, 126 pour le ſecond, & 165 pour le 3e. Je multiplie enſuite l'argent réduit de chacun par ſon temps réduit : ce qui me donne (359464 den.) pour le 1r Aſſocié, que je nomme ſa miſe complette, parce qu'elle renferme ſon argent & ſon temps. (369684 deniers) pour la miſe complette du ſecond, & (1,124,144 d.) pour celle du 3e ; & ayant arrangé ces trois miſes Complettes, au ſecond lieu B d'une Régle de Societé, je les rabaiſſe aux trois nouvelles miſes Complettes (89866) (92421) (281036 ;) en prenant le quart de chacune, & effaçant les premieres. Je fais enſuite une ſomme (463323) de ces 3 dernieres, que j'écris au 1r Lieu A de la Régle de ſocieté, pour la Miſe complette totale ; & je mets le Profit total (10 liv. 5 ſols 3 den.) au 3e Lieu C, comme dans les Régles de ſocieté ſimples.

Et achevant la régle comme dans le chapitre précedent, je trouve que le premier doit avoir (1 liv. 19 ſols 9 den.) de profit, par rapport à ſon argent & à ſon temps enſemble. Le ſecond (2 liv. 0 ſol 11 den.) pour ſon argent & ſon temps ; & le 3e (6 liv. 4 ſols 5 den.) pour ſon argent & ſon temps pris enſemble.

II. Un ouvrage fait par 4 perſonnes a été eſtimé 350 liv. le premier y a travaillé 18 jours, & gagne (6) par chaque journée ; le ſecond y a travaillé 6 jours, & gagne (3) par jour : le 3e, 4 jours, & gagne (2) par jour ; & le 4e, 12 jours, & gagne (8) par jour : on demande ce qui appar-

tient à chacun par rapport à ſon temps & à ſon gain particuliers.

2d EXEMPLE

miſe complette totale.	*miſe complete réduite.*	*gain total.*	*gains particuliers.*
	48—24		98tt—16f—6d
85	18—9	350	37—1—2
17	8—4	70	16—9—4
	96—48		197—12—11
	85		350tt—40f—23d

Pour y parvenir je multiplie le temps de chaque ouvrier par ſon gain, afin d'avoir ſa miſe Complete; ſçavoir (48) pour le 1r, (18) pour le ſecond, (8) pour le 3e, & (96) pour le 4e, que j'écris au ſecond Lieu de la régle de ſocieté; & prenant la moitié de chaque miſe Complete, j'en fais une ſomme (85,) que j'écris au 1r Lieu, mettant le prix de l'ouvrage 350 au 3e, lequel prix je rabaiſſe encore avec la Miſe totale réduite, à 70 & 17, en prenant la 5e partie de chacun. Enfin je réſous la Régle de ſocieté à l'ordinaire; ce qui me donne (98 liv. 16 ſols 6 den.) pour la paye du 1r. (37 liv. 1 ſol 2 den.) pour celle du ſecond. (16 liv. 9 ſols 4 den.) pour celle du 3e: & (197 liv. 12 ſols 11 den.) pour celle du dernier.

III. 14 perſonnes ont fait un ouvrage qui a été eſtimé 350 l. Les deux premiers de la 1re claſſe ont travaillé chacun 8 jours à 12 heures par jour, & gagnoient chacun 6; les trois de la 2e Claſſe ont travaillé chacun 6 jours à 10 heures par jour, & gagnoient chacun 3. Les 4 de la 3e Claſſe ont

travaillé chacun 4 jours, à 8 heures par jour, & gagnoient chacun 2. Enfin, les 5 de la 4e Classe ont travaillé chacun 12 jours à 6 heures par jour, & gagnoient 8 chacun. On demande ce qu'il appartient à chacun de ces 14 personnes, par raport à son temps & à son gain particuliers.

3e Exemple.

mise complete des 4 Classes	*mise cõplete des ouvr.*	*mise cõpl. des class.*	*profit total*	*profits des particuliers.*
	576 — 144 — 10008			41 ℔ - 15 ſ - 1 d
1207	180 — 45 — 1225		350	13 ℔ - 1 ſ - 0 d
	64 — 16 — 64			4 ℔ - 12 ſ - 9 ½
	576 — 0 — 0			
		12087		350. 20. 23

Pour résoudre cet éxemple, ayant multiplié les jours de chaque classe d'ouvriers par ses heures, pour avoir tout son temps, & derechef ce temps par son gain, pour avoir sa mise Complette, je trouve pour la mise Complette de chaque ouvrier de la premiere Classe (576 ;) pour la mise Complete de chaque ouvrier de la 2e classe 180 ; pour la mise Complette de chaque ouvrier de la 3e (64,) &pour la miseComplette de chaque ouvrier de la 4e encore 576, que je rabaisse à l'ordinaire aux 4 nouvelles mises Complettes (144,45, 16, 144 ;) & comme la 1re & derniere mises Complettes sont pareilles, je n'en fais qu'une, que je multiplie encore par 7 ; parce que la premiere classe renferme 2 ouvriers, & la derniere 5 ; ce qui me donne enfin (1008) pour la mise Complette de la 1re & derniere Classe d'ouvriers : Je multiplie de même

la 2e miſe réduite (45) par 3 ; à cauſe que la 2e Claſſe d'ouvriers en renferme 3 ; ce qui me donne (135) pour la miſe Complette de la 2e claſſe. Enfin je multiplie la miſe réduite (16) par 4, à cauſe que la 3e Claſſe contient 4 ouvriers ; ce qui me donne (64) pour ſa miſe Complette, & faiſant une Régle de ſocieté, dans laquelle je mets au ſecond Lieu les trois premieres miſes Complettes (144, 45, & 16) de chaque ouvrier, la ſomme 1207 des 3 miſes de chaque Claſſe (1008, 135, & 64) au premier ; & le prix de l'ouvrage 350 au 3e, comme dans les articles précedens, je trouve tout d'un coup pour chaque ouvrier de la premiere & derniere claſſe (41 l. 15 ſ. 1 d. $\frac{1}{2}$) pour chacun de la 2e (13 liv. 1 ſol 0 den.) & pour chacun de la 3e (4 liv. 12 ſols 9 den. $\frac{1}{2}$; & c'eſt la réſolution de la régle.

Pour en faire la preuve on multipliera (41 liv. 15 ſols 1 den. $\frac{1}{2}$ par le nombre 7 des ouvriers de la 1re & derniere claſſe ; enſuite (13 liv. 1 ſol 0 d.) par le nombre 3 de ceux de la 2e Claſſe ; & enfin (4 l. 12 ſ. 9 d.) par le nombre 4 de ceux de la 3e Claſſe ; & comme la ſomme de ces 3 produits fait préciſément le prix total (350 liv. de l'ouvrage propoſé ; c'eſt une preuve morale que l'opération eſt bonne : mais non pas une preuve abſoluë ; Le plus ſur & le plus commode eſt de repaſſer ſur ſon opération.

Théorie.

IV. Pour entendre la pratique de ces régles, il ne faut que conſiderer, que le rapport qui doit ſe trouver entre la part du premier Aſſocié (par éxemple) & celle du troiſiéme, qui ſont dans le 1r

exemple (1 liv. 19 ſols 9 den. & 6 liv. 4 ſ. 6 d.) doit renfermer les rapports de la miſe du premier, à celle du 3e, & du temps du 1r au temps du 3e. Or la miſe Complette du 1r; ſçavoir (359, 464,) étant le produit de ſon argent par ſon temps; & la miſe Complette du 3e; ſçavoir (1124, 144,) étant auſſi le produit de ſon argent par ſon temps; le raport qui eſt entre ces deux nombres renferme en luy les deux raports de l'argent du 1r à celui du 3e, & du tems du 1r à celui du même 3e, comme on l'a vû dans la Théorie des proportions compoſées, chapitre 12, art. 4. Donc auſſi le rapport des deux miſes complettes réduites (89, 866) & (281, 036, renferme en lui les deux mêmes rapports. Mais il a été démontré dans le chapitre précedent, que les deux parts de gain du 1r & du 3e (1 liv. 19 ſols 9 den.) & (6 liv. 4 ſols 6 den.) ont même raport entr'elles, que les 2 miſes réduites (89, 866) & 281, 1036,) qui les ont données. Donc auſſi le raport de ces 2 mêmes parts de gain renferme en lui les deux raports de l'argent du 1r à celui du 3e, & du temps du 1r au temps du 3e.

Le même raiſonnement peut s'appliquer au ſecond éxemple, & même au 3e, ſoit que l'on compare la miſe Complette de chaque ouvrier à ſon gain; ſoit que l'on compare la miſe Complette de chaque claſſe au ſien : Il faut ſeulement conſiderer qu'il eſt inutile de mettre les miſes Complettes des Claſſes au ſecond Lieu, pour diviſer enſuite les profits des mêmes claſſes du quatriéme Lieu, par le nombre des ouvriers (comme la régle ſemble naturellement le demander) afin d'avoir la part de chaque ouvrier, parce qu'on feroit alors deux opérations contraires; d'autant que pour avoir les miſes Complettes des Claſſes : on a déja multiplié les miſes Complettes des ouvriers par

le nombre de leur classe ; il suffit donc de mettre au second lieu les mises Complettes des ouvriers, afin d'avoir tout d'un coup le gain de chaque ouvrier.

CHAPITRE XVI.

Des Régles d'Estimation sur la force, la quantité, le nombre, &c.

1r EXEMPLE.

ART. I. UN premier Agent fait son ouvrage en trois jours à 12 heures par jour : Un 2d fait le même ouvrage en 4 jours : Un 3e en 8 heures ; & un 4e en 9 heures. On demande par proportion, lorsqu'on en fera agir plusieurs ensemble, comme, (par éxemple) tous les 4, combien ils employeront de temps à faire le même ouvrage.

Tems du 1r,	*Temps du* 2d	*Temps du* 3e	*Temps du* 4e
36 heures.	48 heures.	8 heures.	9 heures.

CONDITIONS DES FORCES.

exposant du 1r	*exposant du* 2d	*exposant du* 3e	*exposant du* 4e
48. 36. 8. 12	36. 12. 6. 3	36. 9 —— 9	36. 4. 2. 1.
8 —— 2	8 2 —— 1	48. 36. 8. 1	48. 36. 8. 2
9 —— 1	9 —— 1	9. —— 4. 2	8 —— 4. 8

exposant du 1r *reduit.*	*exposant du second.*	*exposant du troisiéme.*	*exposant du quatriéme.*
3456 —— 4	2592 —— 3	1944 —— 18	1728 —— 16

Régle inverse.

Si 4 parties de force	demandent	36 heures,	combien	41 parties.	*Réponse.* 3 heu. 31. m.

Régle droite.

Si 41	36 heures,	4	*Réponse.* 3 heu. 31. m.

4 force du 1r
3 force du 2d
18 force du 3e
16 force du 4e
—
41 force des 4 enſemble.

Pour répondre à cette queſtion, il faut, par le moyen du temps de chaque agent, réduit en mêmes eſpeces; (ſçavoir ici à 36 heures, 48 heures, 8 heures, & 9 heures,) il faut, dis-je, connoître ſon degré de force, ou de quantité, &c. Et pour cet effet on prend pour les expoſans de la force du 1r agent les 3 temps (48. 8. 9 des 3 derniers agens: pour ceux du ſecond agent les 3 temps (36. 8. 9.) des 3 autres: de même pour les expoſans de celle du 3e les 3 temps 36. 48. 9 des 3 autres: Et enfin pour les expoſans de la force du 4e, les 3 temps (36. 48. 8.) des 3 premiers. On rabaiſſe enſuite également (s'il eſt poſſible) les expoſans de ces 4 agens, comme on rabaiſſe les differens chefs dans les proportions compoſées, c'eſt-à-dire ſans aucun choix. Prenant (par éxemple) au lieu de 48 du 1r agent, de 36 du 2d, de 48 du 3e & du 4e, leurs tiers (16, 12, 16 & 16,) & de même des autres expoſans de ces 4 agents, juſqu'à ce qu'ils ne puiſſent plus du tout être rabaiſſez: ce qui réduit les conditions du 1r agent à (2, 2 & 1) ſeulement; celles du ſecond à (3, 1, 1;) celles du 3e à (9, 1, 2,) & enfin celles du 4e à (1, 2, 8) ſeulement: après quoi il ne reſtera que de faire des produits continuels de ces nouveaux expoſans de chaque agent: ce qui donnera pour l'expoſant de la force, ou quantité du 1r agent (4,) pour celui du ſecond (3,) pour celui du 3e (18, & pour celui du 4e (16.) Ce préparatif étant achevé, on fera une ſomme de ces 4 expoſans; ſçavoir (41,) qui ſera l'expoſant de la force des 4 enſemble, & on réſoudra enſuite cette régle de proportion inverſe. [Si 4 valeur réduite du 1r agent donnent 36 heures

pour le temps qu'il employe à faire ſon ouvrage, que donnera 41 valeur des 4 agents, enſemble ?] Il viendra au quotient le temps qu'ils employeront tous enſemble à faire l'ouvrage propoſé ; ſçavoir 8 heures 31 minutes pour les 4. On trouvera de même que les 3 derniers enſemble employeroient 3 heures 54 minutes.

Théorie.

II. Pour entendre la pratique de ces régles, il faut ſe ſouvenir d'un principe naturellement connu; ſçavoir [*Que ſi le temps d'un 1r agent n'eſt par exemple que les $\frac{3}{4}$ du temps d'un ſecond agent, c'eſt une marque certaine, que la force, ou le nombre, ou la quantité de ce ſecond agent n'eſt que les $\frac{3}{4}$ de ceux du 1r, & de même pour toute autre proportion.*] Ainſi l'expoſant (3) du temps du 1r, eſt auſſi l'expoſant de la force du ſecond, & réciproquement l'expoſant (4) du temps du ſecond eſt en même temps l'expoſant de la force, nombre, quantité, &c. du 1r, & de même pour tous les autres agens. De plus, il faut ſe ſouvenir que les 4 produits (3456,) (2592,) 15552,) & (13824,) des expoſans non réduits des 4 agens; ſçavoir (48.8.9) (36. 8. 9.) (36. 48. 9.) (36. 48. 8.) ont même raport entr'eux, que les 4 produits réduits (4) (3) (18) (16,) qui en ſont tirez ; comme on l'a démontré dans la Théorie des proportions compoſées. Or les 2, (3456) & (2592) (par éxemple) peuvent être regardez comme faits des 2 nombres 48, & 36, multipliez chacun par 8 fois 9, ou 72, donc le 1r (3456) a même raport au ſecond (2592,) que le temps du ſecond 48 au temps du 1r 36; c'eſt-à-dire que la force du

1r à celle du ſecond. (ſuivant le 1r principe ci-deſſus) Donc auſſi le 1r produit réduit (4) a même raport au 2d réduit (3,) que la force du 1r à celle du ſecond. Regardant de même les 2 produits (2592 & (15552,) comme faits de la multiplication de (8) & (48) par 9 fois 36, ou par (324,) le ſecond produit (2592) aura même rapport au 3e (15552, que le temps (8) du 3e, au tems (48) du ſecond, Donc auſſi le ſecond produit réduit 3, a même rapport au 3e 18, que le tems 8 du 3e au temps 48 du ſecond, ou que la force, quantité, &c. du ſecond à celles du 3e, & de même du 3e agent comparé au 4e, & d'un plus grand nombre; ce qui vient de ce que tous ces produits pris 2 à 2, comme (par éxemple) (3456) & (13824) ont tous les mêmes multiplicateurs communs, excepté un dans chacun, qui eſt l'expoſant du temps de ſon agent opoſé, & par conſequent celui de ſa force propre: comme dans ces 2 éxemples, 9 & 36, marquent les temps du ſecond & du 1r agent, & les forces du 1r & du ſecond. Donc les 4 produits réduits 4, 3, 18, 16, expriment directement les forces, nombres, ou quantitez des 4 agens pris dans le même ordre, on ſeparément, ou conjointement à ſouhait; c'eſt-à-dire que la ſomme des deux 1rs produits marquera en même-tems celles des deux 1rs agens; la ſomme des trois 1rs produits marquera celles des trois 1rs agens; & enfin la ſomme des 4 produits marquera celles des 4 agens: ce qui étant entendu, le reſte ſe conçoit de ſoi-même.

CHAPITRE XVII.

Des Régles d'Alliages, ou des Equivalens.

Ces Régles ſervent à méler ou allier les prix, les poids, les volumes ou grandeurs, les temps, les forces, les nombres, & en un mot toutes ſortes de quantitez d'une maniere équivalente.

ART. I. ON ſuppoſe que l'on a de deux eſpeces de marchandiſes, dont la premiere vaut (par éxemple) 35 liv. & la ſeconde 22 liv. & qu'on veut, en prenant de l'une & de l'autre, faire un compoſé, ou mélange, ou Alliage, qui peſe 100 livres, & dont le prix ſoit de 27 francs la livre peſant, qui eſt un prix moyen entre 22 liv. & 35 liv. & l'on demande le poids qu'il faut prendre de chaque eſpece de marchandiſe, pour faire le compoſé Equivalent.

1r EXEMPLE.

1re eſpece 35 ℔				
Alliage, ou Equival. 27 ℔	13	5	100 liv. p. quantité de l'Alliage.	38 l. p. 7 on. 3 drac.
2e eſpece 22 ℔		8		61 l. p. 8 on. 5 drac.
		13		100 0 0

Si 13 donnent 5 | combien 100 | *Rép.* 38 l. p. 7 on. 3 dra.
Si 13 donnent 8 | combien 100 | *Rép.* 61 l. p. 8 on. 5 dra.

Ces ſortes de queſtions ſe réſoudent aiſément par

par les régles de ſocieté, & n'en different que dans le préparatif, comme on va le voir.

Je prens donc la difference du prix moyen, ou de l'Alliage (27) à chaque prix extrême 35 & 22, ôtant 27 de 35 : ce qui donne la 1re difference 8 ; & ôtant 22 de 27, ce qui donne la 2e difference 5. Je regarde enſuite ces deux differences 8 & 5 comme les miſes particulieres d'une Régle de ſocieté ; c'eſt pourquoi j'en fais le 2d lieu de cette régle, mais en renverſant leur ordre, c'eſt-à-dire mettant la difference de 22 au droit de 35, & celle de 35 au droit de 22. J'écris de plus leur ſomme B, au 1r Lieu de la régle à l'ordinaire ; & la quantité déſirée de l'Alliage, ſçavoir 100 liv. peſant au 3e, qui tient lieu de gain total. Enfin je réſous la Régle de ſocieté, comme ci-devant chapitre 14 : ce qui me donne pour la part de la ſocieté, qui répond à la difference 5, & en même-temps au prix 35 l. (38 liv. peſ. 7 onces, 3 drac.) (& (61 liv. peſ. 8 onc. 5 drac.) pour la part de la ſocieté qui répond à la difference 8, & en même-temps au prix 22 liv. Ainſi la premiere part eſt la quantité qu'il faut prendre de la marchandiſe à 35 liv. & la 2e part eſt celle qu'il faut prendre de la marchandiſe à 22 liv. pour compoſer l'alliage ou l'équivalent propoſé.

comme 13 au 35

Preuves.

Ces ſortes de régles, outre la preuve de leur opération, qui eſt celle de la Régle de ſocieté, ont encore leur preuve particuliere, qui eſt celle de leur méthode. Car il eſt évident que puiſque le prix moyen de l'Alliage (27 liv.) doit être équivalent aux deux extrêmes (35 liv. & 22 liv.) la valeur totale de l'Alliage doit être la même, ſoit

qu'on multiplie le prix moyen (27 liv.) par la quantité de liv. qu'on en prend, c'eſt-à-dire par la quantité de l'Alliage, ſçavoir ici par 100; ſoit qu'on multiplie chaque prix extreme 35 livres, & 22 livres par la quantité qu'on tire de chacun, ſçavoir 35 par 38 livres peſant, 7 onces, 3 drachmes, & 22 liv. par 61 liv. peſ. 8 onc. 5 drac. pour faire une ſomme des deux produits.

Or on a vû dans les régles de proportion ſimples que ces ſortes de multiplications d'eſpeces differentes ſe réduiſent à des Régles de Trois, lorſque les 2 multiplicateurs contiennent des parties, & & que ces parties ſont compoſées; ce qui ſe fait ainſi. [Si 1 liv. peſ. ou 128 drachmes valent 35 liv. 0 ſols 0 den. combien 38 liv. peſ. 7 onc. 3 drach. ou 4923 drachmes ? *Réponſe.* 1346 liv. 2 ſols 8 den.] & [Si 128 drachmes valent 22 liv. 0 ſ. 0 den. combien 61 liv. peſ. 8 onc. 5 drac. ou 7877 drachmes ? *Réponſe.* 1353 liv. 17 ſols 2 den.] Or ajoutant les deux quantitez produites par ces deux régles de proportion, ou leurs Réponſes, on trouve pour la valeur entiere ou totale de l'Alliage (2699 liv. 19 ſols 10 den.) qui ne differe de 2700 liv. ci-deſſus, que de 2 den. ce qui n'eſt icy preſque rien.

				Réponſe.
Si 128dr.	valent 35℔	comb. 4923dr.		1346℔ 2ſ 8
Si 128dr.	valent 22℔	comb. 7877dr.		1353℔ 17ſ 2
				2699℔ 19ſ 10

27℔ × 100 = 2700℔ } Mais quand il n'y a point de parties dans les eſpeces de l'Alliage, comme dans cet éxemple, où il n'y a que des liv. ſçavoir 35 liv. 27 liv. & 22 liv. ſans ſols, ni deniers; il eſt plus court de multiplier tout d'un

coup les quantitez particulieres d'Alliage par leurs eſpeces ; ſçavoir icy 38 liv. peſ. 7 onces, 3 drac. par (35,) & 61 liv. peſ. 8 onc. 5 drac. par (22) ce qui donne des livres peſant ; ſçavoir (1336 l. peſant, 258 onc. 105 drac.) & (1342 liv. peſ. 189 onc. 110 drac.) qui ſe réduiſent à l'ordinaire à (1346 liv. peſ. 2 onc. 1 drac.) & (1353 liv. peſ. 13 onc. 6 drac.) dont la ſomme 2699 liv. peſ. 15 onc. 7 drac. eſt la même à une drachme près, qu'en multipliant la quantité moyenne (27 liv.) par la quantité totale (100 liv. peſ.) de l'alliage ; ſçavoirr (2700 l. peſ.) Ce qui prouve que l'eſpece moyenne (27 liv.) eſt effectivement un équivalent à l'égard des deux eſpeces extrêmes 35 & 22, par rapport aux quantitez particulieres de l'Alliage, comme la queſtion le demande. Enfin l'on fait cette preuve par parties aliquotes, en multipliant les livres, ſols & deniers qui marquent le prix de chaque eſpece de l'Alliage par les livres peſant, onces & dracmes, qu'on doit prendre de chacune de ces eſpeces ; toutes les fois que les parties, tant de la livre peſant, que de la livre valant, ne ſont pas fort compoſées.

Sur les Poids.

2d EXEMPLE.

premiere eſpece, 72 liv. peſ.
eſpece de l'Alliage, 66 liv. peſ.
deuxiéme eſpece, 56 liv. peſ.

II. Supoſez qu'un pied cubique d'une eſpece de matiere quelconque peſe 72 livres, qu'un pied cubique d'une autre eſpece, en peſe 56 ; & qu'un pied cubique d'une 3e eſpece compoſée de ces 2 en peſe 66, on con-

noîtra combien il y a de chacune des deux premieres eſpeces dans la 3e, en ſuivant la Régle précedente, comme on le voit ci-deſſous.

Réſolution.

	2e *difference.*	*Quantité de l'Alliage.*	*Réponſe.*
	10		540 points, *ou* 7 po. cou. 6 lig. c.
16	6	1 pied cubiq. *ou*	
1	1re *difference.*	144 lig cour. *ou*	324 points, *ou* 4 po. cou. 6 lig. c.
		864 points.	
	16		12 po. 12 lig. cou.

La régle de ſocieté étant donc achevée, comme dans l'article précedent, donne 540 points courants, leſquels ſe réduiſent à 7 pouces courants, 6 lignes courantes de pied cubique, qu'il faut prendre de la premiere eſpece, dont le poids eſt de 72 livres & 324 points cour. qui ſe réduiſent à 4. pouc. cour. 6 lignes cour. & c'eſt ce qu'il faut prendre de la 2e eſpece dont le poids eſt de 56 liv. peſ. & ces deux quantitez jointes enſemble, font préciſément le pied cubique demandé par la propoſition; comme on le voit par la preuve de la régle de ſocieté.

Que ſi on veut faire la preuve de l'alliage, on multipliera 72 liv. peſ. par la quantité que l'on en prend, ſçavoir (7 pouc. 6 lig. cour.) & 56 liv. peſ. auſſi par la quantité que l'on en doit prendre, qui eſt (4 pouces 6 lig. cour.) ſçavoir par parties aliquotes: ou l'on fera ces deux régles de proportion, comme dans la preuve de l'article précedent. [Si 1 pied cubique peſe 72 liv. 0 onces, 0 drachmes, &c. combien 7 pouces 6 lig. ou 90 lig. peſeront-elles? Réponſe. 45 liv.] Et [Si 1 pied cubique peſe 56 liv. peſant, 0 onc. 0 drac. &c. com-

bien 4 pouc. 6 lig. courantes, ou 54 lig. cour. peſeront-elles ? Réponſe. 21 liv.] Ajoutant donc ces deux réponſes, on trouve préciſément les 66 liv. peſ. qui ſont le poids propoſé de la quantité de l'alliage total ; ſçavoir d'un pied cubique : ce qui fait voir que l'eſpece moyenne 66 liv. peſ. eſt équivalente aux eſpeces extrêmes 72 liv. peſant & 56 liv. peſant, par raport aux quantitez portées par la régle ; & c'eſt ce qui en fait la preuve.

Remarquez qu'il eſt plus court de faire la preuve par 2 ſimples multiplications, comme dans l'exemple précedent, lorſqu'il n'y aura point de parties jointes aux eſpeces. Comme ici multipliant 7 pouces, 6 lignes par 72, & 4 pouc. 6 lig. par 56, & ajoûtant les 2 produits, on trouve la même choſe ; qu'en multipliant 1 pied cub. par 56, c'eſt-à-dire 66 pieds cub. & de même multipliant 540 points par 72, & 324 points par 56, & ajoûtant les 2 produits, on trouve 57024 points, de même qu'en multipliant 66 par 864 points : ce qui ne laiſſe aucunement douter, que la Régle ne donne une équivalence parfaite.

Sur les volumes grandeurs meſures ou étenduës.

III. Supoſant qu'une quantité de matiere d'un certain poids, comme de 150 liv. peſant contienne 25 meſures ; qu'une autre quantité d'une matiere differente, mais du même poids de 150 liv. peſant, contienne 30 des mêmes meſures ; & qu'une 3e compoſée de ces deux premieres, & auſſi peſante, c'eſt-à-dire encore de 150 liv. peſant en contienne une quantité moyenne entre 25 & 30, comme 28 ; on demande combien ce dernier volume ou Alliage contient de livres de chacune des deux 1res eſpeces.

3e EXEMPLE.

premiere eſpece, 25 de meſure, ou de diminution.

Alliage, ou Equivalent } 28 de meſure, ou de diminution

deuxiē. eſpece, 30 de meſure, ou de diminution.

	2		60 liv. peſ.	
℥		155 liv. peſ.		
I		30 liv. peſ.	90 liv. peſ.	1°. Quand les volumes propoſez ſont, ou des
	3			
	℥		155 liv. peſ.	

liqueurs, ou des grains, ou des poudres, &c. on peut aiſément les meſurer, & le nombre des meſures, que chacun contient, marque ſa quantité, grandeur, ou étenduë naturelle, & ſpecifique. 2°. Lorſque ces volumes propoſez ont des figures ſimples & régulieres, on meſure leurs volumes par les régles de la Géométrie-pratique. Enfin ſi ce ſont des figures trop irrégulieres, ou trop compoſées, & qu'on ne puiſſe meſurer; on trouve le raport de leurs volumes, ou grandeurs, ou étenduë, en les plongeant dans des liqueurs en cette ſorte.

On ſuſpend le volume propoſé au bras d'une balance, avec un fil très-leger, & l'on met dans le baſſin de la balance qui eſt de l'autre côté à pareille diſtance de l'appuy, autant de poids qu'il en faut pour faire équilibre dans l'air, avec ce volume; on plonge ce même volume en cet état, dans un vaſe où il y a quelque liqueur, comme de l'eau; alors ce volume diminuë de poids d'une certaine quantité, ſelon que la liqueur eſt plus ou moins peſante: c'eſt pourquoi on ôte du baſſin oppoſé de la ba-

lance autant de poids qu'il eſt neceſſaire, afin que le reſte faſſe équilibre avec ce volume entierement plongé dans la liqueur ; & il eſt à remarquer que ce poids dont le volume aura diminué eſt préciſément égal au poids de la liqueur dont il occupe la place : ce que l'on démontre dans l'Hydroſtatique. On fait la même choſe à l'égard des deux autres volumes pris ſeparément, marquant éxactement les diminutions de leurs poids dans la liqueur ; leſquelles diminutions, avec la premiere ci-deſſus, repreſentent les quantitez des trois volumes de liqueur, dont les trois volumes propoſez occupent la place, qui ſont les mêmes que les quantitez de ces trois volumes propoſez. C'eſt pourquoi on peut ſe ſervir de ces trois diminutions pour repreſenter les quantitez des trois volumes propoſez : ainſi on peut ſuppoſer que les nombres (25. 30. & 28 cideſſus) ſont les trois diminutions trouvées par l'experience ; après quoi il ne reſtera que de réſoudre la Régle de ſocieté, comme dans le premier article ; & l'on trouvera qu'il faut prendre 60 livres peſant de l'eſpece qui contient 25 meſures ; & 90 liv. peſant de celle qui en contient 30.

Et pour la preuve de cet alliage, il eſt évident que les 60 liv. peſant de la 1re eſpece multipliées par la valeur (25) de cette même eſpece, marquent ſa quantité, grandeur, ou étenduë totale ; & que les 90 liv. peſant de la 2e eſpece (30) multipliées par la même eſpece, marquent auſſi ſa quantité, ou grandeur, &c. De même le produit de l'eſpece moyenne ou équivalente (28) par la quantité de l'Alliage (150,) expriment auſſi la quantité ou l'étenduë totale de l'Alliage. Donc ce dernier produit doit être égal aux 2 précedents, afin que l'eſpece moyenne ſoit équivalente aux deux extrêmes.

Mais lorſque les eſpeces de l'Alliage (comme 25, 28, &c.) contiendront des parties, auſſi-bien que leurs quantitez ou réponſes (60 liv. peſant, &c.) il faudra faire les multiplications indiquées par ces 3 régles de proportion, comme on l'a remarqué dans la preuve de l'article premier. [Si 1 liv. peſant vaut 25 meſures, &c. combien en vaudront 60 liv. peſant, &c ?] [Si 1 liv. peſ. vaut 30 meſures, &c. combien 90 liv. peſant ?] Et enfin [Si 1 liv. peſ. vaut 28 meſures, &c. combien 150 liv. peſant ?] Les trois réponſes marqueront les valeurs totales des deux eſpeces extrêmes, & de la moyenne ; dont la derniere réponſe doit être égale aux deux premieres, afin que l'eſpece moyenne ſoit équivalente aux deux extrêmes ; ou bien on fera les multiplications indiquées ci-deſſus, par les parties aliquotes de la livre peſ. comme on l'a dit dans le premier article.

Sur les temps, ou ſur les viteſſes, ou lenteurs des Agents.

4e EXEMPLE.

premiere eſpece,	2 jours :	*lenteur du 1r*
premiere eſpece repetée.	2 jours.	
Alliage, ou Equivalent.	4 jours :	*lenteur du moyen*
deuxiéme eſpece,	7 jours :	*lenteur du 2d*
troiſiéme eſpece,	9 jours :	*lenteur du 3e*

IV. Un premier Agent fait un certain ouvrage qui contient 54 toiſes, 3 pieds, 9 pouces, en deux jours, à 12 heures. Un ſecond fait le même ouvrages en 7 jours ; un 3e en 9 jours : Et l'on voudroit faire le même ouvrage en 4 jours, en ſe

ſervant de ces trois Agents, de même que d'un ſeul qui feroit les 54 toiſes, 3 pieds 9 pouces en 4 jours. Pour cet effet on demande le temps pendant lequel chacun de ce ces trois Agents doit travailler.

Réſolution.

			Quantité de l'Alliage.	
	5.	3e *diffe.*		24toi.4pi.6po.9li.
22	3.	2e *diffe.*	54 toi. 3 pi. 9 po.	13--3-11---3
4	2.	1re *diffe.*	18 toi. 1 pi. 3 po.	36--2---6---0
	2.	1re *diffe.* *repetée.*		9---0---7---6
				9---0---7---6
	22			54toi.3pi.9po.6li.

Et comme il n'y a qu'une eſpece au deſſous de la quantité moyenne 4; ſçavoir 2, & qu'il y en deux au deſſus, ſçavoir 7 & 9, je répete deux fois l'eſpece 2 qui eſt unique, afin qu'il ſe trouve un nombre égal d'eſpeces d'alliage autour de l'eſpece moyenne (4;) (ce qui doit s'obſerver en toute régle d'alliage.) Je prends enſuite la difference de 9 à 4, ſçavoir 5 & la difference de 7 à 4, ſçavoir 3 que j'écris au droit de 2 & 2; & la difference (2) de 2 à 4, que j'écris au droit de 7 & auſſi au droit de 9, toujours dans un ordre renverſé, comme on l'a obſervé juſqu'ici, & j'acheve la Régle de ſocieté à l'ordinaire, qui me donne pour l'eſpece (2) les deux quantitez d'ouvrage (22 toiſes, 4 pieds, 6 pouces 9 lignes,) & (13 toiſes, 3 pieds, 11 pouces 3 lignes,) qui font enſemble 36 toiſes 2 pieds, 6 pouces pour cette premiere eſpece. Elle me donne auſſi 9 toiſes, 0 pieds, 7 pouces, 6 lignes, pour l'ouvrage de la 2e eſpece (7,) & autant pour la 3e (9:) & toutes ces quantitez d'ouvrage compoſent enſemble les (54 toiſes, 3 pieds, 9

pouces, o lig.) propoſées; ce qui ſert de preuve à la Régle de ſocieté dont on s'eſt ſervi.

A l'égard de la preuve de l'Alliage, il eſt évident que le produit du nombre qui marque le temps ou la lenteur naturelle de chaque agent, par l'ouvrage qu'il doit faire, marque d'une maniere generale le temps qu'il employera à faire cet ouvrage. Donc le ſeul produit de l'Eſpece moïenne ou Equivalente (4) par l'ouvrage total (54 toiſes, 3 pieds, 9 pouces qu'elle eſt ſupoſée faire, doit être égal à la ſomme du produit des autres Agents; autrement cette eſpece moyenne ne ſeroit pas équivalente à tous ces autres Agens, comme on le demande.

Quand les eſpeces de l'Alliage contiennent des parties; de même que leurs Réponſes, ces multiplications ſe font alors par parties aliquotes, ou ſe changent dans les régles de proportion ſuivantes, ſelon la remarque de la preuve de l'article 1. (Si 1 toiſe demande 2 jours .... heu..... min. &c pour le tems ou la lenteur du 1r agent; combien ſon ouvrage de (36 toiſes, 2 pieds, 6 pouc?) (Si 1 toiſe demande 7 jours ..... heures .... minut. &c. pour le temps, ou la lenteur du 2d Agent, que demande 9 toiſes, o pi. 7 pouces 6 lignes ?) (Si 1 toiſe demande 9 jours .... heures .... minut. pour le temps ou la lenteur du 3e, que demandent encore 9 toiſes, o pieds, 7 pouces, 6 lignes ? Et pour l'eſpece moyenne (Si 1 toiſe demande 4 jours ..... heures .....minutes pour ſon temps ou ſa lenteur, que demandent (54 toiſes, 3 pieds, 9 pouces ? Alors chaque réponſe marquera d'une maniere generale & indéterminée le temps que chaque Agent employera. Donc la Réponſe de la derniere eſpece devra être ſeule égale aux trois réponſes des 3 précedentes; puiſque cette eſpece moyenne doit être équivalente aux trois autres.

Mais si l'on a besoin du temps absolu & déterminé que chaque agent employera à faire son ouvrage, on prendra pour le 1r lieu des 4 régles précedentes l'ouvrage total donné (54 toises, 3 pieds, 9 pouces,) au lieu de l'unité, & on trouvera pour le temps du premier agent (1 jour 4 heures,) pour le temps du second (1 jour 2 heures,) pour le temps du 3e (1 jour 6 heures,) & ces 3 temps composeront ensemble les 4 jours demandez par la proposition.

Il est bon de remarquer ici que ces parties d'ouvrage & de temps trouvez par la Régle de compagnie ne sont absolument déterminées, que quand il n'y a que 2 agens seulement. Car en répetant chaque Espece de l'Alliage (prise à volonté) tant de fois que l'on voudra, comme nous avons fait la premiere 2 fois, ou même répetant plusieurs ensemble: ensorte cependant qu'il y en ait toujours un nombre égal autour de la quantité moyenne (4,) on trouvera de nouvelles parties d'ouvrage; & par consequent de nouvelles parties de temps correspondantes, lesquelles résoudront également bien la question: ce qui doit s'entendre en general de toutes les régles d'Alliage qui contiennent plus de trois especes en tout, y comprise la moyenne.

Sur la Force.

V. Nous supposons qu'un premier agent ait 5 parties, degrés, ou livres de force; qu'un second en ait 7; & un 3e 12, & on demande de les régler sur le pied de 8; c'est-à-dire de faire travailler le premier pendant un certain nombre de jours; le second pendant un autre, & le 3e pendant un autre, en telle sorte que l'ouvrage proposé (qui

vaut par éxemple 36 toiſes quarrées) ſoit achevé par ces trois agents en 105 jours, de même que ſi la Force moyenne ou Equivalente (8) travailloit ſeule autant que ces trois agents enſemble; c'eſt-à dire pendant les mêmes 105 jours.

5e EXEMPLE.

Force du 1r	5	—	4	——	35 jours
Force du 2d	7	—	4	——	35 jours
			jours		
Force équival.	8	12	105.		
Force du 3e	12	—	1	——	$8\frac{3}{4}$ jours } 35 jours.
	12	—	3	——	$26\frac{1}{4}$ jou. }
			12		

Après avoir arangé ces trois Agents autour de la Force-moyenne ou équivalente à l'ordinaire, & repeté deux fois la force 12, qui eſt toute ſeule de ſon côté comme dans l'éxemple précédent, & enfin avoir achevé la Régle de ſocieté, on trouve que chacune des deux premieres forces 5 & 7 doit travailler 35 jours, & pour la 3e 12, on trouve les deux temps (8 jours $\frac{3}{4}$) & 26 jours $\frac{1}{4}$,) qui font encore enſemble 35 jours.

Et ſi l'on veut connoître ce que chaque force extrême doit faire d'ouvrage, ou des 36 toiſes quarrées propoſées, on fera ces trois régles de proportion compoſées: (Si la force moyenne 8 en 105 jours fait 36 toiſes q. combien la force 5 en fera-t'elle en 35 jours? Il viendra au 4e terme 7 toiſes, 3 pieds pour ſon ouvrage.) De même, (Si 8 en 105 jours fait 36, combien 7 en 35 jours? Réponſe. 10 toiſes, 3 pieds. Et (Si 8 en 105 fait 36, combien 12 en 35 jours? Réponſe 18 toiſes, 0 pieds: & ces trois ouvrages enſemble font pré-

ciſément l'ouvrage propoſé 36 toiſes quarrées ; ce qui peut ſervir de preuve à la régle.

A l'égard de la preuve ordinaire de cet éxemple, il eſt encore évident que le produit de chaque force particuliere par le temps pendant lequel on l'a fait travailler, marque ſa quantité totale d'ouvrage d'une maniere generale & indéterminée. Donc le ſeul produit de la force moyenne ou Equivalente (8) par ſon temps 105 jours, ſçavoir 840 doit être le même, que la ſomme des produits des forces extrémes 5, 7 & 12, par le temps 35 de chacune ou des trois enſemble 24 par 35, ou enfin de 140 par 6 ; ce qui eſt manifeſte ; & lorſqu'il y aura des fractions dans les agents & dans leur temps, on fera les quatre multiplications ci-deſſus par parties aliquotes ; ſinon on réſoudra les trois régles de proportion ſuivantes, ſelon la remarque de la preuve de l'article I. [Si 1 donne 5 liv. peſant de force .... onces .... drac. combien 35 jours ..... heures ....., minutes ?] Il viendra un 4e terme qui marquera en general le temps de la premiere force. [Si 1 donne 7, combien 35 ? [Si 1 donne 12, combien 35 ?] Et [Si 1 donne 8, combien 105 ? il viendra un temps ou 4e terme qui doit être ſeul égal aux trois réponſes ci-deſſus des trois forces extrémes enſemble, afin que l'agent moyen leur ſoit Equivalent à toutes 3 comme il le doit.

Sur le gain, la dépenſe, l'ouvrage, &c.

VI. Un certain nombre d'agents (comme 100) de differentes eſpeces ont concouru à faire en même-temps, un certain ouvrage qui vaut 1800 livres ; la premiere eſpece ou claſſe gagnoient chacun 30

liv. la deuxiéme 20 liv. la troiſiéme 15 liv. & la quatriéme 10 liv. On demande combien il y avoit d'agens dans chaque claſſe.

6e EXEMPLE,
ou l'Equivalent n'eſt point donné.

premiere claſſe, 30ll
deuxième claſſe, 20ll
claſſe moyenne, 18ll
troiſiéme claſſe, 15ll
quatriéme claſſe, 10ll

Pour répondre à cette queſtion, il faut remarquer que l'eſpece moyenne, ou l'Equivalent de l'Alliage n'eſt point ici donné, comme dans les exemples précédens. Mais il n'eſt rien de plus aiſé que de le connoître; puiſque l'ouvrage entier de 1800 liv. diviſé par le nombre entier d'ouvriers, ſçavoir 100, donnera 18 pour le gain Equivalent, ou moyen qui conviendroit à chaque ouvrier, s'ils travailloient tous également. Il ne reſte donc que de réſoudre la Régle d'Alliage à l'ordinaire, qui donnera 32 pour la premiere claſſe d'ouvrers, 12 pour la ſeconde, 8 pour la 3e, & 48 pour la 4e; & ces quatre valeurs font préciſément les 100 ouvriers propoſez.

Réſolution.

	8	*nombre de*	32. *nombre de la 1re claſſe.*
	3	*l'Allage.*	12. *nombre de la 2e claſſe.*
25ll			
1		25	
	2	4	8. *nombre de la 3e claſſe.*
	12		48. *nombre de la 4e claſſe.*

A l'égard de la preuve, il eſt évident que les 32 agents multipliez par le gain de chacun, ſçavoir par 30; plus les 12 multipliez par le gain de chacun, ſçavoir 20; plus les 8 multipliez par le

gain de chacun, ſçavoir 15 ; plus enfin les 48 multipliez par le gain 10 de chacun ; le tout enſemble doit compoſer les 1800 parties de gain, auſſi-bien que les 100 ouvriers multipliez par leur quantité de gain Equivalent, (18) ce qui ſe voit ici à l'œil.

Il faut remarquer que les éxemples de l'eſpece de ce dernier ne réuſſiſſent que par le plus grand hazard du monde, à cauſe que toutes les réponſes que l'on demande doivent arriver ſans fractions ; c'eſt la même choſe lorſqu'on demande de faire une certaine ſomme, comme par éxemple 9 liv. 10 ſols avec des pieces de 5, de 10, de 15, & de 30 ſols ; car il y a beaucoup à tatonner avant d'amener 4 réponſes en entiers, comme les 4 nombres 1, 2, 3, 4 ; c'eſt pourquoi cet éxemple & le précédent ne ſont bons, au plus, que pour éxercer les commençans.

Théorie.

VII. L'on a vû dans tous les éxemples précedens que la nature des Alliages demande, que la ſomme de tous les produits de chaque eſpece extréme, comme 30. 20, 15, 10, (dans le 6e éxemple) par ſa réponſe (32, 12, 8, 48,) ſoit toujours égale au ſeul produit de l'Eſpece moyenne par le 3e lieu de la régle de ſocieté, commme ici de 18 par 100, afin que cette eſpece moyenne devienne un Equivalent à l'égard des eſpeces propoſées (30, 20, 15, 10,) & de leurs quantitez (32, 12, 8, 48.)

Or c'eſt une proprieté de tout nombre, comme 18 pris entre pluſieurs autres à ſouhait 30, 20, 15, 10, en nombre égal au deſſus & au deſſous de lui, repetez

repetez ou non repetez. [Que toujours la ſomme des produits de chaque nombre, par la difference de ſon correſpondant (comme ici de 30 par 8, difference de 10 ; de 20 par 3, difference de 15 ; de 15 par 2, difference de 20 ; & de 10 par 12, difference de 30,) eſt égale au ſeul produit de la quantité moyenne (18,) par la ſomme 25 de toutes ces differences :] dont la raiſon eſt, que le produit de 18 par 25 eſt la même choſe que le produit de 18 par 8, enſuite par 3, enſuite par 2, enfin par 12 ; en ajoutant ces quatre derniers produits. Or ſi après avoir multiplié 30 par 8 & 20 par 3, on multiplie auſſi 18 par 8 & par 3, il eſt évident que les deux derniers produits enſemble ſeront moindres que les deux premiers enſemble du produit de 8 par l'excès de 30 ſur 18, ſçavoir 12, & du produit de 3 par l'excès de 20 ſur 18 ; ſçavoir 2. Mais en recompenſe ſi l'on multiplie encore 15 par 2 & 10 par 12 ; & qu'enſuite on multiplie 18 par 2 & par 12, ces deux derniers produits ſurpaſſeront ces 2 premiers du produit de 2 par l'excès de 18 ſur 15, ſçavoir 3 ; & du produit de 12 par l'excès de 18 ſur 10, ſçavoir 8. Donc ces deux derniers produits ſurpaſſeront ces deux premiers, d'autant que les deux premiers de la premiere opération ci-deſſus ſurpaſſent les deux derniers de cette même opération. Donc la ſomme des quatre derniers produits des deux opérations doit être parfaitement égale à celle des quatre premiers des deux mêmes opérations, à cauſe de la compenſation qui ſe trouve entre les quatre d'une part, & les quatre de l'autre.

Mais c'eſt auſſi une proprieté de la Régle de compagnie dont on s'eſt ſervi pour réſoudre celles de l'Alliage. [Que les parties de profit (32. 12. 8. 48.) ont toujours le même rapport entr'elles,

&

& chacune avec leur ſomme totale (100,) que les differentes parties de la miſe (8. 3. 2. 12.) ont entr'elles, & chacune avec leur ſomme totale (25)] D'où il ſuit que ſi au lieu de multiplier 30 par 8, 20 par 3, 15 par 2, & 10 par 12, on multiplie 30 par 32, 20 par 12, 15 par 8, & 10 par 48 ; & qu'en même-temps, au lieu de multiplier 18 par 25, on multiplie 18 par 100 ; ce dernier produit ſera encore ſeul égal aux quatre 30 par 32, 20 par 12, 15 par 8, & 10 par 48 ; ce qu'il falloit prouver.

CHAPITRE XVIII.

Des Proportions & Progreſſions arithmetiques, & des Progreſſions Géométriques.

ART. I. SI l'on a pluſieurs nombres qui ſe ſurpaſſent également les uns les autres, étant pris de ſuite deux à deux ſeulement, comme les nombres (2, 4 ; 5, 7 ; 10, 12, &c.) ou (0, 3 ; 5, 8 ; 9, 12, &c.) on dit qu'ils ſont en proportion arithmetique, comme l'on dit que des nombres ſont en Proportion géométrique, lorſqu'ils ſe contiennent également les uns & les autres, étant pris de ſuite, ſeulement 2 à 2 ; comme les nombres (2, 4 ; 5, 10 ; 10, 20, &c.) ou comme ceux-ci (1, 3 ; 5, 15 ; 8, 24, &c.) C'eſt de ces dernieres proportions dont on a fait uſage juſqu'icy.

Mais ſi tous les termes ſe ſurpaſſent également ſans interruption, comme ceux-ci (2, 4, 6, 8, 10, 12, &c.) ou (0, 3, 6, 9, 12, &c.) on dit alors qu'ils forment une progreſſion arithmétique ; &

l'on dit qu'ils en composent une Géométrique, quand ils se contiennent les uns les autres également, sans interruption, comme les termes (2, 4, 8, 16, 32, &c.) ou (1, 3, 9, 27, 81, &c.) De sorte que dans la Proportion arithmetique, les differences entre les termes pris 2 à 2 doivent être toutes égales. Ainsi la difference de 0 à 3 est 3; celle de 5 à 8 est 3; celle de 9 à 12 est 3. Il en est de même dans la Progression arithmetique; la difference de 2 à 4, de 4 à 6, de 6 à 8, &c. est toujours la même; sçavoir 2. Mais dans la Proportion géométrique, c'est le rapport des termes pris 2 à 2, qui est par tout le même. Ainsi le rapport de 2 à 4, est le même que de 5 à 10, que de 10 à 20, &c. parce que 2 est en 4, 2 fois; 5 en 10 pareillement 2 fois; & 10 en 20, 2 fois. A l'égard de la difference entre tous ces derniers termes, elle est par tout inégale: car la difference de 2 à 4 est (2,) celle de 5 à 10 est (5,) & celle de 10 à 20 est (10;) ce qu'il faut bien remarquer, crainte de confondre la difference qui régne dans la proportion arithmetique, avec le Rapport qui régne dans la géométrique. C'est la même chose dans la Progression géométrique, comme dans (1, 3, 9, 27, 81:) car 1 est 3 fois en 3; 3 est 3 fois en 9; 9 est 3 fois en 27, &c. Mais à l'égard des differences entre tous les termes de cette progression, elles sont toutes inégales entr'elles; car de 1 à 3 il y a (2,) de 3 à 9 il y a (6,) de 9 à 27 (18) de 27 à 81 (54) &c.)

On peut même remarquer en passant, comme une chose particuliere à la Progression géométrique, qu'elle se réproduit elle-même à l'infini par ses differences. Car dans la Progression géométrique triple ci-dessus (1, 3, 9, 27, 81, &c.) les differences sont (2, 6, 18, 54, &c.) qui composent encore entr'elles une semblable Progression

géométrique triple, & de même à l'égard des différences de cette derniere, & de toutes les autres à l'infini.

Au reſte le nombre qui marque combien ou comment chaque terme de la Progreſſion géométrique eſt contenu dans ſon ſuperieur d'un degré, s'appelle l'Expoſant de la Progreſſion, à laquelle il donne le nom ; ainſi dans la Progreſſion triple ci-deſſus (1, 3, 9, 27, 81,) chaque terme eſt le tiers de celui qui le ſuit immédiatement en montant ; & le nombre (3) qui marque ce rapport perpetuel, s'appelle, à cauſe de cela l'Expoſant de la Progreſſion, comme qui diroit ſon Dénominateur, parce que c'eſt lui qui fait qu'on la nomme Progreſſion triple. Il en eſt de même de toutes les autres progreſſions géométriques poſſibles. A l'égard de la raiſon pour laquelle on appelle cette Progreſſion géométrique & l'autre arithmétique, je n'en ſçai aucune ; ces deux progreſſions étant également numeriques, & même la Géométrique étant d'un uſage ſans comparaiſon plus étendu dans l'arithmetique, que la Progreſſion Arithmétique même.

1^r EXEMPLE,

Sur les Progreſſions arithmétiques.

II. On ſuppoſe qu'il faille tirer d'une Pépiniere quantité d'arbres, pour les planter en égale diſtance le long d'une Allée qui y aboutiroit étant prolongée, & qu'on n'en puiſſe tranſporter qu'un à la fois. On demande combien il y aura de chemin à faire en tout, tant pour aller que pour revenir.

Soit le nombre des arbres 304 ; la diſtance de la pépiniere au 1^r ou plus proche 80 toiſes, & au dernier ou plus éloigné, 1212 toiſes. Je fais une ſom-

me de ces deux distances, sçavoir 1292, que je multiplie par le nombre des arbres (304;) le produit est (392768,) qui est le nombre de toises qu'il faudra faire en tout pour transporter les arbres proposez de la pépiniere à leurs places; le chemin d'aller & de revenir y étant compris.

Il est évident au reste que ce que l'on demande en cette question n'est autre chose que le double de la somme des termes d'une Progression arithmétique, dont le premier terme est 80, le dernier 1212, & le nombre des termes 304; puisque la distance de la Pépiniere à chacun des arbres de l'Allée, augmente pour chaque arbre d'une même quantité ou difference, qui est la distance qu'il y a entre chaque arbre, sçavoir ici 4 toises.

Le plus petit terme de la Progression pourroit être zéro, comme si le premier arbre commençoit à la Pépiniere même: en ce cas la somme du plus petit, & du plus grand terme se trouveroit être seulement ce même plus grand terme; & le reste de l'opération seroit le même. Comme si l'on demande la somme des 10 termes élementaires (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 9:) ajoutant 0, à 9, la somme est toûjours 9; laquelle étant multipliée par le nombre des termes 10, donne 90 pour produit, dont la moitié 45 est la somme des 10 termes proposez.

Théorie pour les Proportions & Progressions Arithmétiques.

III. Suivant la définition que nous avons donnée de la Proportion Arithmétique 2, 4; 5, 7; 10, 12, &c.) dans le premier article ci-devant, il est aisé de voir, que si l'on prend 4 de ses termes 2 à

2, comme par exémple les 4 (2, 4; 5, 7,) ou (2, 4; 10, 12,) (5, 7; 10, 12, &c.) la ſomme des deux termes moyens 4 & 5 dans le 1r exemple ſera toujours égale à celle des deux extrémes 2 & 7, ſçavoir 9. De même les 2 extrémes 2 & 12 dans le 2d exemple, font 14, comme les 2 moyens 4 & 10 font 14; 5 & 12 font 17 dans le 3e exemple, de même que 7 & 10 font 17 : dont la raiſon eſt que ſi d'un côté l'on veut que la ſomme de 4 & de 5 (dans le 1r exemple) ſurpaſſe de 2 celle de 2 & de 7, à cauſe que 4 ſurpaſſe 2 de 2; d'un autre côte l'on doit conſiderer que la ſomme de 2 & 7 doit ſurpaſſer auſſi la 1re de 2; à cauſe que 7 ſurpaſſe 5 de 2. Ainſi ces deux ſommes ont un avantage égal ou réciproque l'une ſur l'autre. Donc l'une ne doit pas ſurpaſſer l'autre : de même qu'on a vû dans les Régles de proportion droites de 4 termes, que toujours le produit des 2 termes moyens eſt égal à celui des 2 termes extrêmes, à cauſe d'une compenſation toute ſemblable qui ſe [illegible] entre ces deux produits. C'eſt la même choſe dans progreſſions Arithmétiques (2, 4, 6, 8, 10, 12,) &c du 1r article. Car les 2 termes extrémes 2 & 12 font 14; les 2 prochainement moyens 4 & 10 font auſſi 14; les 2 moyens ſuivans 6 & 8 font encore 14. De même dans la Progreſſion (0, 3, 6, 9, 12.) Les 2 extrémes 0 & 12, font 12, les prochainement moyens 3 & 9, font encore 12; 6 & 6, ou 6 pris 2 fois fait toujours 12. On prend le terme moyen 6, deux fois; parce qu'on peut toujours, avec les trois termes en progreſſion (3, 6, 9,) en compoſer cette Proportion arithmétique de quatre termes 3. 6 | 6. 9) dans laquelle la ſomme des deux termes moyens 6 & 6, ou le double de 6 eſt toujours égale à celle des deux extrémes 3, 9, & par conſequent auſſi à celle de zéro & 12.

Il ſuit évidemment delà, que ſi l'on prend la ſomme 14 cideſſus 3 fois, c'eſt-à-dire la moitié autant de fois qu'il y a de termes dans la progreſſion Arithmétique (2, 4, 6, 8, 10, 12,) ou tout d'un coup autant de fois qu'il y a de termes dans cette Progreſſion,& qu'on prenne enſuite la moitié du produit, on aura la ſomme de toute la progreſſion. Et ſi dans la Progreſſion (0, 3, 6, 9, 12,) l'on prend la ſomme de 0, & de 12, ſçavoir 12, deux fois; c'eſt-à-dire une pour (0 & 12,) & l'autre pour 3 & 9; plus une demie fois pour le Moyen arithmétique 6, ou ſi l'on prend tout d'un coup cette même ſomme (12) quatre fois pour les quatre termes (0, 3, 9, 12,) plus une fois pour le Moyen (6,) c'eſt-à-dire 5 fois pour les 5 termes (0, 3, 6, 9, 12,) & que l'on prenne enſuite la moitié du produit; on aura encore la même ſomme de la progreſſion. Ainſi la régle que nous avons donnée pour trouver la ſomme d'une Progreſſion Arithmetique, eſt generale à toute ſorte de Progreſſion arithmetique.

On peut tirer de ces principes quelques conſéquences utiles, comme (par éxemple;) Qu'ayant une Progreſſion arithmétique quelconque, comme (2, 4, 6, (7) 8, 10, 12,) ou (2, 4, 6, (8,) 10, 12, 14,) & concevant un Moyen ou Milieu arithmétique, comme 7 ou 8; deux fois ce Moyen vaudront autant que ſes deux termes voiſins enſemble; & trois fois ce même Moyen vaudront encore autant que tous les trois termes enſemble: ainſi dans le 1r éxemple, 2 fois 7 font 14, comme 6 & 8 font 14; de plus trois fois 7 font 21, de même que 6 (7) & 8 font 21; & dans le ſecond éxemple, 3 fois 8 font 24, de même que (6, 8 & 10.) Dans le même 1r éxemple 4 fois le Moyen (7) font autant que les quatre voiſins

(4, 6, 8, 10,) & dans le ſecond, 4 fois 8 font 32, de même que les 4 termes (4, 6, 10, 12;) Dans le même 5 fois le Moyen 8, font 40:) de même que les 5 termes conſecutifs (4. 6, 8, 10, 12;) & dans le premier 5 fois 7 font 35; de même que les 5 termes (4, 6, (7,) 8, 10, font 35, & ainſi de tous les autres termes: D'où l'on déduit que tout Moyen aritmétique eſt ſeul équivalent à ſa Progreſſion entiere.

3. Si la progreſſion n'a que trois termes dont le premier ſoit zéro, comme (0, 4, 8, le double du Moyen (4) ſera donc égal au ſeul extrême 8, Et ſi la proportion ou progreſſion a quatre termes, dont le premier ſoit zéro, comme (0, 3; 4, 7,) la ſomme des deux termes moyens 3 & 4 ſera auſſi égale alors au ſeul extrême 7.

4. Si dans une Progreſſion arithmétique comme (2) 4 (6) 8 (10) 12 (14 &c.) on prend quatre termes à ſouhait, en laiſſant entre les deux derniers termes choiſis autant de termes de la progreſſion, qu'entre les deux 1rs, comme par exemple les 4 (2. 6 | 10. 14,) en paſſant 4 entre 2 & 6; & 12 entre 10 & 14, ces 4 formeront encore une Proportion arithmétique; parce que la difference de (2 à 6) comprend les deux differences égales de 2 à 4, & de 4 à 6; c'eſt-à-dire le double de la Difference (2) de cette Progreſſion arithmétique. De même la difference de 10 à 14, comprend les deux differences égales de 10 à 12, & de 12 à 14; c'eſt-à-dire encore le double de la même difference (2) de la Progreſſion. Donc la difference totale de 2 à 6 eſt la même, que la difference totale de 10 à 14: & par conſequent le quatre termes (2. 6 | 10. 14,) font une proportion aritmétique. Ce ſeroit la même choſe ſi l'on prenoit dans la Progreſſion (0) 2, 4 (6) (8) 10, 12, (14,) les

quatre termes (0, 6, 8, 14, &c.) en paſſant 2 & 4 entre les 2, 1rs, & les deux termes 10 & 12 entre les deux derniers.

1r EXEMPLE

Sur les Progreſſions Géométriques.

IV. Un courier eſt envoyé après un autre qui a 10 lieuës d'avance devant lui ; mais le dernier parti fait 3 lieuës par heure, au lieu que le 1r n'en fait que 2. On demande donc à quelle diſtance le dernier parti atteindra le premier. Pour réſoudre cette queſtion, j'ôte la moindre viteſſe (2) du premier courier de la plus grande (3) du dernier, pour avoir leur difference qui eſt (1) & je réſous cette Régle de proportion Géométrique : [Si (1) de difference, donne 3 pour la plus grande viteſſe ; combien donneront 10 lieuës d'avance ? *Réponſe.* 30 lieuës.] C'eſt-à-dire que le dernier parti n'atteindra le 1r qu'après que le dernier aura fait 30 lieuës ; ou ſi l'on veut après 10 heures de marche, à compter du moment de ſon départ.

2d EXEMPLE.

V. Si au contraire la diſtance du lieu du départ, au lieu où le dernier courier doit atteindre le premier eſt donnée, comme par éxemple, 30 lieuës, avec l'avance du premier ſur le dernier, encore de 10 lieuës, & la viteſſe du 1r toujours de deux lieuës, par heure ; on ôtera cette avance des 30 lieuës pour avoir le reſte du chemin que le premier doit faire juſqu'au moment de la jonction, ſçavoir 20 lieuës ; & l'on fera cette autre Régle de proportion [Si 20 lieuës qui reſtent à faire, donnent

30 lieuës pour la courſe entiere, que donnera la viteſſe du premier courier qui eſt de deux lieuës par heures ?] il viendra au 4e terme (3) lieuës, que le dernier courier doit faire par heure, afin d'atteindre le premier à 30 lieuës du lieu du départ.

Il eſt évident au reſte qu'on peut regarder le chemin de ces deux couriers, comme une Progreſſion géométrique, qui commence par 10 lieuës, & finit par zéro : car tandis que le dernier courier fait les 10 lieuës que le premier a d'avance ſur lui ; le premier qui va plus lentement d'un tiers fait la valeur des deux tiers de ces mêmes 10 lieuës, ſçavoir 6 lieuës & deux tiers ; & tandis que le dernier courier fait ces 6 lieuës $\frac{2}{3}$, que le premier a encore d'avance ſur lui ; ce dernier fait encore les $\frac{2}{3}$ de cette avance, ſçavoir 4 lieuës & $\frac{4}{9}$ de lieuë : & ainſi de ſuite, en diminuant toujours l'avance du premier courier ſur le dernier d'$\frac{1}{3}$, juſqu'à ce que cette avance ſoit réduite à zéro. Or il eſt évident qu'une ſuite de termes dont chacun n'eſt que les $\frac{2}{3}$ de ſon précédent, compoſent une Progreſſion géométrique, ſuivant la définition de cette Progreſſion ; puiſque tous ces termes ont un même raport à leurs ſuivans immédiatement.

3e EXEMPLE.

VI. On demande juſqu'à quel nombre de livres on peut peſer avec 1 drachme, 2 drachmes, 4 drachmes, 1 once, 2 onces, 4 onces, 8 onces, 1 livre, 3 liv. 9 liv. 27 liv. 81 liv. Il faut remarquer premierement qu'avec les 7 premiers poids on peut peſer juſqu'à leur ſomme, en mettant ſeulement des poids du côté vuide de la balance, lequel eſt oppoſé à la marchandiſe ; & de même

auſſi avec les cinq derniers, en mettant des poids des deux côtez de la balance, comme je l'ai découvert il y a déja pluſieurs années. Ainſi il ne s'agit que de trouver la ſomme de la Progreſſion géométrique double (8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,) & celle de la Progreſſion géométrique triple, (81, 27, 9, 3, 1.) L'expoſant de la 1re eſt 2, ou ($\frac{2}{1}$,) & ſon terme ſuperieur eſt 16 onces, d'où ôtant le moindre terme $\frac{1}{8}$ d'once, il reſte (15) onces, 7 drac.) La Régle de proportion ſera donc pour la progreſſion double : [Si l'excès des 2 ſur 1 dans l'Expoſant ($\frac{2}{1}$,) ſçavoir 1, donne le dénominateur 1 ; que donnera le reſte 15 onces 7 drachmes ?] Il eſt évident que la réponſe eſt 15 onces, 7 drach. Et pour la Progreſſion triple, l'Expoſant eſt 3, ou $\frac{3}{1}$, & ſon terme ſuperieur (243,) d'où ôtant le moindre terme 1, il reſte 242. Ainſi la Régle de proportion pour cette Progreſſion ſera celle-ci : [Si l'excès de 3 ſur 1 dans l'Expoſant ($\frac{3}{1}$,) ſçavoir 2, donne le dénominateur 1, que donnera le reſte 242 ?] Il eſt encore évident que la réponſe eſt (121 ;) ainſi avec cette douzaine de poids on peut peſer depuis 1 drachme juſqu'à 121 liv. incluſivement. Au lieu que ſi l'on eût pris les 5 plus haut poids (1, 2, 4, 8, 16,) en la place de (1, 3, 9, 27, 81,) comme l'on fait ordinairement dans le Commerce, on n'auroit pû peſer que juſqu'à 31 liv. peſant, qui en eſt la ſomme : ce qui pourra produire dorénavant dans le commerce un facilite conſiderable, comme je l'eſpere.

Supoſez par éxemple qu'il fallût peſer la valeur de 113 liv. peſant de quelque marchandiſe. On mettroit d'abord dans le baſſin vuide, les trois poids 81, 27, & 9 ; & comme leur ſomme fait 117 l. p. on mettroit du côté de la marchandiſe les 2 autres poids 3 & 1 qui rabattroient 4 liv. peſ. des

117 : ce qui feroit en tout les 113 livres propoſées. Si l'on vouloit peſer 65 livres, 11 onces, 7 drachmes, on mettroit dans le baſſin vuide 81 liv. peſ. & 27 du côté de la marchandiſe : ce qui feroit 54 en tout: Enſuite 9 & 3 livres peſant du côté vuide, & 1 du côté de la marchandiſe ; ce qui feroit 65 liv. peſant, Enfin on mettroit du côté vuide 8, 2, & 1 onces, 4, 2, & 1 drachmes : ce qui donneroit les 11 onces, 7 drachmes propoſées.

Théorie pour les Progreſſions géométriques.

VII. De ce que le même rapport régne entre tous les termes d'une Progreſſion géométrique, comme (3, [6] 9, [18] 27, [54] 81, [162] 243, [486] 279) il s'enſuit non ſeulement que (3 , | 9, || 9 | 27,) mais encore par ſouſtraction que (3 | 6 || 9 | 18,) &c. c'eſt-à-dire que le 1[r] terme 3 eſt à la difference 6, des 2 premiers 3 & 9 ; comme le ſecond 9 eſt à la difference 18 du 2[d] au 3[e], ou de 9 à 27 ; & ainſi de tous les autres termes. Donc auſſi tous les termes enſemble de la Progreſſion propoſée (3, 9, 27, 81, 243) ont même raport à toutes leurs differences enſemble (6, 18, 54, 162, 486) (y compriſe la difference 486 du plus grand terme (243) à ſon ſuperieur (729,) afin qu'il y ait autant de differences, que de termes propoſez :) que le 1[r] terme (3) à la 1re difference 6, par éxemple ; puiſqu'il eſt évident que 3 étant la moitié de 6, & 9 de 18, & 27 de 54 ; 3, 9, & 27 enſemble, ou 39 ſont encore la moitié des 3 enſemble, 6, 18, 54, ou de 78, & ainſi de toutes les autres. Prenant donc l'Expoſant de la Progreſſion qui eſt icy (3,) on aura l'analogie (3 | 1 || 9 | 3 ;) 3 eſt à à 1 comme 9 eſt à 3. Donc auſſi la difference de 1, 416

à 3; ſçavoir 2 a même rapport à 1; que la difference de 3 à 9, ſçavoir 6, avec 3; ou tout d'un coup, que toutes les differences enſemble 6, 18, 54, &c.) qui compoſent la ſeule difference du ſuperieur de la Progreſſion 729 au plus petit terme 3, ont à tous les termes de la Progreſſion (3, 9, 27, 81, 243,) pris enſemble.

2. Mais dans le 2d exemple où l'Expoſant de la progreſſion $1\frac{1}{2}$, ou $\frac{3}{2}$, (puiſqu'un courier fait 3 lieues, tandis que l'autre n'en fait que 2,) & le plus petit terme zéro; l'analogie generale ci-deſſus ſe change en cette autre particuliere. [Comme l'excès du plus grand des 2 expoſans 3, ſur le plus petit 2, ſçavoir 1, eſt à 2; ainſi l'excès du ſuperieur de la Progreſſion ſur le zéro ou le rien, (c'eſt-à-dire ainſi ce même ſuperieur) eſt à la ſomme de tous les termes de la même Progreſſion. Or dans cet exemple ce nombre ſuperieur eſt l'avance du premier courier ſur le dernier parti, & le chemin qui reſte à faire au premier parti eſt la progreſſion entiere. L'analogie eſt donc en ce cas (comme 1 eſt à 2; ainſi l'avance du premier courier parti, eſt au chemin qui lui reſte à faire avant d'être atteint:) ou ſi l'on veut encore [comme 1, eſt à 3, c'eſt-à-dire aux 2 enſemble 1 & 2: ainſi l'avance du premier courier parti, eſt à la diſtance du lieu du départ à celui de la jonction, c'eſt-à-dire à tout le chemin à faire,] qui eſt préciſément régle qu'on a donnée.

3. On peut ajouter icy quelques proprietez des progreſſions géométriques qui auront leurs uſages dans la ſuite, comme celle-cy: Que dans toute progreſſion géométrique, par exemple (1, (3) 9 (27) (81) 243 (729) ſi l'on prend pluſieurs termes (3, 27, 81, 729) 2 à 2, en laiſſant également de termes entre chaque couple, on aura

encore une proportion géométrique ; car le raport de 3 à 27 (par éxemple) comprend les 2 raports égaux de 3 à 9, & de 9 à 27 ; & le rapport de 81 à 729, comprend les 2 rapports de 81 à 243, & de 243 à 729, qui ſont encore égaux entr'eux, & aux deux précédens, par la nature des Progreſſions géométriques, dans leſquelles les rapports ſont égaux entre tous les termes.

Donc le raport compoſé de 3 à 27 eſt le même que le raport compoſé de 81 à 729, puiſque c'eſt un principe de raiſon ; [Que les raports qui ſont compoſez d'un égal nombre de raports égaux, ſoient égaux ;] & qu'il y a évidemment le même raport compoſé entre un fils & ſon aïeul, qu'entre le pere & le biſaïeul. Et par conſequent les quatre termes (3 | 27 || 81 | 729,) ſont encore en proportion géométrique.

4. Si l'on a une proportion géométrique de quatre termes, dont le premier ſoit l'unité (1 | 3 || 6 | 18) le produit des deux termes moyens 3 & 6, ſera égal au ſeul extrême 18. Car on a vû dans les Régles de proportion : Que toujours le produit des deux termes moyens d'une proportion géométrique, eſt égal à celuy des deux extrêmes. Or les deux extrêmes ſont icy 1 & 18, dont le produit eſt 18, puiſqu'une fois 18 eſt toujours 18. Si la proportion n'a que 3 termes, dont le 1er ſoit encore l'unité, comme (1 || 5 || 25,) alors le produit de 5 par lui-même, qu'on appelle ſon Quarré, ſera égal au ſeul extrême 25 ; puiſqu'on peut toujours exprimer cette proportion ainſi (1 | 5 || 5 | 25.)

5. Si l'on multiplie encore le Quarré du Moyen 5, ſçavoir 25 par 5, on aura ce qu'on appelle ſon Cube, lequel eſt toujours lui ſeul égal au produit des trois termes de la Progreſſion (1, 5, 25, ſçavoir 125 : d'où l'on peut inferer auſſi que tout

Moyen Géométrique eſt encore un Equivalent par multiplication à ſa Progreſſion entiere ; mais cette proprieté eſt bien moins utile, que celle du Moyen Arithmétique ; c'eſt pourquoi je ne m'y arrêteray pas davantage. Au reſte on ne doit pas être ſurpris de ce que je traite dans l'Arithmétique des proportions & progreſſions géométriques, & encore moins de ce que je les traite en même-temps que les arithmétiques ; puiſque les unes & les autres ſont également arithmétiques, & ont également lieu dans la ſcience des nombres ; le nom de Géométrique n'étant qu'un terme pour les diſtinguer.

CHAPITRE XIX.

Des Logaritmes & des Queſtions qu'on peut réſoudre par leur moyen.

ART. I. CEs nombres ſont d'une grande utilité ; puiſque par leur moyen on peut éviter les multiplications, les diviſions ; les compoſitions de puiſſances, ou multiplications égales de raports ; les extractions de racines, ou diviſions égales de raports ; les ſouſtractions des quarrez, & faire quantité d'autres opérations de Géométrie & d'Algébre, dont on ne pourroit ſe tirer ſans leur ſecours.

Les Logaritmes ſont des nombres artificiels qu'un ſçavant Anglois nommé le Baron Néper a inventés, & que d'autres ſçavans ont joints aux nombres naturels pour les uſages qu'on vient de rapporter.

On les trouve dans l'Arithmétique de Henry

Brigs, qui accompagnent les nombres naturels juſqu'à (100,000.) on en trouve encore en quantité d'autres livres; ceux du P. Preſtet les accompagnent juſqu'à 20000 ſeulement; les petits de du Lac de Mr Ozanam, & de Blondel ne montent que juſqu'à (10000.) Nous allons nous ſervir des petits de Dulac, ou de M. Ozanam, qui ſont les mêmes, comme étant ſuffiſans pour des éxemples, & dans les mains de tout le monde.

Ier EXEMPLE.

Du Changement de la Souſtraction en addition; ou de la Souſtraction des quarrez, par le moyen de leurs racines données.

18
25
—
43—16334685
25
18
—
7—08450980
301—24785665

25	18
25	144
125	324
50	
625 quarré de 25	
324 quarré de 18	
301. *Difference.*	

II. Supoſez les nombres donnez 25 & 18, au moyen deſquels on veüille connoître la difference de leurs quarrez, ſans avoir la peine de former d'abord ces quarrez, pour ôter enſuite l'un de l'autre. Pour y parvenir, je fais une ſomme de 18 & 25 qui eſt (43,) dont je prens le logaritme (16334685,) j'ôte encore 18 de 25; ce qui me donne pour leur difference (7,) dont je prens auſſi le logaritme (08450980: enfin je fais une ſomme de ces deux logaritmes; ſçavoir (24785665, au droit

de laquelle je trouve (301) pour la difference desirée du quarré de 25 au quarré de 18 ; ce qui vient de ce que [*le produit de la somme des deux racines de deux nombres quarrez quelconques par la diffierence des mêmes racines, est toujours égale à la differene des deux mêmes quarrez.*] Comme chacun pour en faire l'épreuve sur des quarrez pris à plaisir. On pourroit par un calcul à peu près semblable, trouver la difference de deux cubes, & en general des deux puissances quelconques, par le moyen de leurs racines, sans former ces puissances. On [redacted] (par éxemple) à l'égard de deux Cubes ; [*Que leur difference est égale au quarré de la difference de leurs racines joint à trois fois le quarré de la somme des mêmes racines ; le tout multiplié par le quart de la difference de ces racines ;*] comme on le démontre dans l'Algébre. D'où l'on déduit une régle logaritmique, à peu près semblable à la précedente ; mais beaucoup plus longue : c'est encore pire dans les puissances plus élevées.

2d EXEMPLE.

Du changement des Multiplications en additions & des divisions en soustractions.

Régle naturelle.

A	Si 8846 den. 4413 en 190 jour.	ont produit 1983 d.	combien 18046 d 9023 en 262 jo.	*Réponse.* 5378d, ou 22ll 8s 2d

Régle Logaritmique

B	190 jo.-22787536 4413d — 36447339	1983d — 32973227

Régle simplifiée.

59234875 — | — 32973227 ||

III. Sup-

9023d-	39553510
252jo.	24014005
	63567515
	32973227

Réſolution.

Somme	96540742
	59234875
Reſte..	37305867
Logarit. de 5378 d	

III. Supoſez que l'on ait cette régle de proportion compoſée à réſoudre.

Si 36 liv. 15 ſ. 6 d.) en (6 mois & 10 jours) ont produit (8 livres 5 ſols 3 deniers) combien produiront par proportion (75 livres 3 ſols 10 deniers) en (8 mois & 12 jours.) Il faut d'abord réduire les trois lieux de la régle dans leurs moindres parties ſemblables ; ſçavoir l'argent en deniers , & le temps en jours ; ce qui mettra la propoſition ſous cette nouvelle forme A.

Mais comme 18046 den. du 3e lieu de la Régle ſurpaſſent (10000,) qui eſt le plus haut nombre naturel de la Table, je rabaiſſe les (18046 den.) avec (8826) du 1r lieu à (9023 d.) & (4413 den.) en prenant la moitié de chacun ; ce qui ſuffit pour avoir des nombres au deſſous de 10000. Je cherche enſuite les logaritmes de tous les chefs de ma Proportion compoſée, comme on le voit en B ; & au lieu qu'il faudroit commencer à l'ordinaire par faire un produit de 190 par 4413 de ſon 1r Lieu, je fais une ſomme de leurs logaritmes, comme on le voit en C ; ſçavoir [illegible] : de même au lieu de faire un produit des deux termes du 3e Lieu, j'ajoute leurs deux logaritmes; ce qui me donne 63567515. Enfin je fais une Régle de proportion logaritmique ſimple que l'on voit en C, dont le 1r Lieu eſt la ſomme (5923, &c. ci deſſus;) le 2d Lieu le Logaritme 32973227 de 1983 deniers, ou de 8 liv. 5 ſols 3 deniers ; le troiſiéme la ſomme (6356 &c. ci-deſſus.) Enfin j'ajoute le ſecond Loga-

ritme de cette régle avec le 3e, (au lieu de faire une multiplication; (& de leur ſomme 9654742, je retranche le premier logaritme (au lieu de la diviſion qu'il faudroit faire à l'ordinaire; ce qui me donne pour reſte un logaritme (37305867,) au droit duquel je trouve dans les tables le nombre naturel 5378 deniers, pour la réponſe de la régle compoſée, leſquels deniers s'évaluënt à l'ordinaire à (22 liv. 8 ſols 2 den.)

Il ſuit de cette Régle, que s'il falloit ſimplement multiplier deux nombres quelconques, comme par exemple 89 par 98, il ne faudroit que prendre leurs logaritmes (19493900) & (19912261) & en faire une ſomme, ſçavoir (39406161); au droit de laquelle on trouveroit dans les logaritmes de la Table le produit (8722), des deux nombres propoſés 89 & 98.

Il ſuit auſſi de-là au contraire, que ſi l'on propoſoit le nombre (8722) à diviſer par 98, il ne faudroit que prendre dans les Tables le logaritme (3940 &c.) du dividende (8722), & en ôter celui du diviſeur 98, ſçavoir (19912261) pris dans les mêmes Tables, le reſte (19493900) ſeroit un logaritme, au droit duquel on trouveroit dans les mêmes Tables le quotient deſiré 89.

498 — 26972293
314 — 24969296

Somme 51941589
31941589

1564—31942367
31941589
1563—31939590 31937590

156400—51942367
156372—51941589
156300—51939590

51941589
51939590

difference 1999

51942367
51939590

difference 2777

	156400	156372		
	156300	156300		
	difference 100	72	*difference*	
	donnent	que donnera		*Réponse.*
Si 2777	1999	100		72

156300
72

156372

Si 100	donnent 72	que donnera	2777	*Réponse.* 1999.

51939590
1999

11941589

Sur quoy il faut remarquer, que ſouvent les nombres propoſés donnent un produit au deſſus

de (10,000) qui eſt le plus haut terme de la Table; comme ſi l'on multiplie (314 liv. par 498) en ce cas ayant ajoûté leurs logaritmes (24969296) & (26972293) on trouve que leur ſomme (51941589) ſurpaſſe le logaritme (40000000) de 10000. Alors il faut retrancher de ſon 1r chiffre (5) pris à gauche, autant d'unitez qu'il eſt neceſſaire, comme icy (2,) afin que le reſte (31941589) ſe trouve entre les logaritmes de (1000) & de (10000,) ſçavoir ici entre les logaritmes (31939590) de (1563) & (31942367) de (1564,) qui ne different entr'eux que de l'unité; ce qui vous fera connoître que le nombre qui appartient au logaritme (51941589) propoſé ci-deſſus, eſt entre les nombres (156300 & (156400,) qui ſont les deux précédens (1563) & (1564) augmentez chacun de deux zéros, c'eſt-à-dire d'autant de zéros, que vous avez retranché d'unitez du premier chiffre (5,) appellé dans tous les logaritmes la Caracteriſtique, leſquels nombres 156300 & 156400, ont par conſequent pour leurs logaritmes (51939590,) & (51942367; ſçavoir ceux de 1563 & 1564 augmentez auſſi chacun de deux unitez dans leur premier chiffre à gauche.

Prenant donc maintenant les differences des logaritmes (51939590) à (51941589) propoſé ci-deſſus; ſçavoir (1999,) & encore celle du même (5193, &c.) à (51942367) ci-deſſus; ſçavoir (2777, & auſſi celle des nombres (156300) à (156400) ci-deſſus; ſçavoir (100,) on en fera cette Régle de proportion [Si 2777 donne 1999, que donnera 100?] Rêponſe. (72,) qu'il faudra ajouter au moindre des deux nombres naturels ci-deſſus, ſçavoir (156300;) ce qui donnera (156372) pour le nombre naturel qui appartient au logaritme propoſé, comme on peut

le verifier, en multipliant les nombres propoſez (314) & (498) entr'eux.

Lorſqu'un nombre ſera donné au deſſus de (10,000,) comme par éxemple le même nombre (156372,) & qu'il s'agira de trouver dans les tables le logaritme qui lui appartient, on fera une opération toute contraire à la précédente, qui eſt de retrancher de ce nombre donné les deux dernieres figures (72) à droite, afin que le reſte (1563) ſe trouve entre 1000 & 10000 (ce qui eſt toujours neceſſaire pour les petites tables;) de prendre enſuite les nombres (156300) & (156400, qui ſont autour de (156372; & leurs logaritmes (51939590) & (51942367,) qui ſont ceux de (1563) & (1564) augmentez chacun de deux unitez dans leur premier chiffre à gauche; c'eſt-à-dire d'autant d'unitez qu'on a retranché de chiffres de 156372: & ayant pris les differences de (156300) à (156400,), ſçavoir (100) de (156300) à (156372; ſçavoir (72:) & enfin des logaritmes (51939590) & (51942367) ci-deſſus: ſçavoir (2777,) on formera cette Régle de proportion. [Si 100 donne 72, que donnera (2777?] Réponſe. 1999, qui étant ajouté à (51939590) donne (51941589) pour le logaritme du nombre propoſé (156372.)

3e Exemple.

Où l'on change les compoſitions de puiſſances, & les extractions de racines en de ſimples multiplications & diviſions de nombres.

IV. Il eſt évident que ſi l'on veut trouver le quarré d'un nombre comme de (12,) on ne doit, ſui-

vant la pratique précedente, que prendre ſon logaritme (10791812 ,) le doubler pour avoir (21583624,) & chercher ce double dans les Tables Logaritmiques, au droit duquel on trouvera le quarré deſiré 144. Si l'on a au coutraire un nombre (158) qu'on regarde comme un Quarrée, & qu'on veüille en tirer la Racine quarrée, (c'eſt-à-dire un nombre qui étant multiplié par ſoi-même faſſe 158,)on prendra ſon logaritme(21986571,) dont il faudra prendre la moitié (10993285,) au droit de laquelle on trouvera dans les mêmes Tables le même nombre 12 pour la Racine deſirée, en prenant le Logaritme le plus proche de (10993285,) lorſque le propoſé ne ſe trouve pas dans la table.

De même quand on voudra former un Cube, comme celuy de 18, on triplera ſon logaritme (12552725,) & l'on trouvera au droit de ce triple (5832) pour le Cube deſiré. Ou ſi l'on veut tirer la racine 3e ou cubique d'un nombre propoſé (5832) conſideré comme un Cube, (c'eſt-à-dire le nombre qui étant multiplié deux fois tout de ſuite par lui-même, produiroit 5832,) on prendra le tiers de ſon logaritme, au droit duquel tiers on trouvera la racine 3e ou cubique deſirée (18.)

Sur quoi il faut remarquer que quand on veut former des quarrez & des Cubes de nombres entiers avec parties, le nombre propoſé doit être réduit auparavant dans ſes moindres parties, comme en lignes courantes ; alors le Quarré ou le Cube qui vient par l'opération ci-deſſus, ſont des lignes quarrées ou cubiques, qu'on réduit en lignes courantes, en diviſant les lignes quarrées par le nombre des lignes qu'il y a dans la toiſe courante ; ſçavoir par 864 ; & par le quarré du même nombre pour les lignes Cubiques ; ſçavoir par (746496 ;)

après quoi il ne reſtera que de rappeller ces lignes courantes aux pouces, les pouces aux pieds, & les pieds aux toiſes par deſimples diviſions à l'ordinaire.

Sur la multiplication & diviſion égale des raports, appliquée aux intereſts d'intereſts.

Sur la Multiplication des raports.

V. Trouver le fond qu'a produit, après un nombre d'années propoſé, une ſomme quelconque miſe à profit, auſſi-bien que ſes intereſts par chaque année, à un intereſt ou denier tel qu'il ſoit. Soit par éxemple la ſomme ou premier fond propoſé (375 liv.) qu'on veut faire profiter avec ſes intereſts par chaque année, pendant l'eſpace de (6 années) conſecutives au denier (9.) On demande après ces 6 années, tout ayant été mis à profit, & la ſomme étant ajoutée avec ſes intereſts & intereſts d'intereſts, quel eſt le fond que cette premiere ſomme à produit.

Pour réſoudre cette queſtion, il faut ſe ſouvenir de ce qu'on a dit dans l'article précedent; ſçavoir, que quand on multiplie un nombre quelconque comme (9) par lui-même, le produit (81) qui en réſulte ſe nomme ſon Quarré, ou ſa ſeconde puiſſance, parce que 9 entre deux fois dans ſa compoſition; & ce nombre multiplié (9) s'appelle la ſeconde racine, ou ſimplement la racine Quarrée de 81. De même multipliant encore le quarré 81 par ſa racine 9, le 2d produit (729) qui en vient, s'appelle le Cube de 9, ou ſa 3e Puiſſance, parce que 9 y entre trois fois, & 9 s'appelle la 3e Racine, ou la racine Cubique du Cube 729; & multipliant encore ce Cube 729 par ſa racine 9, le produit 6561 s'appelle la 4e puiſſance de 9, & 9 ſa 4e racine, & ainſi de ſuite: car paſſé la 3e

puiſſance, on ne compte plus aujourd'hui que par 4e, 5e 6e puiſſance, &c. 4e, 5e, 6e racine, &c.

Faites donc maintenant cette analogie : [Si la puiſſance de l'intereſt ou denier (9) marquée par le nombre des années écoulées, (ſçavoir ici la 6e puiſſance) donne une pareille puiſſance du même intereſt ou denier, augmenté de l'unité ; (c'eſt-à-dire ici de 10,) que donnera le premier Fond propoſé 375 livres.

4e EXEMPLE.

Rég. Logarit.	donne	que dõnera	*Réponſe.*
Si 57254550	60000000	25740313	706 liv.
	25740313		
	Somme, 85740313		
Réſolution.	57254550		
	Reſte, 28485763		
	Log. de 706		

Pour réſoudre cette analogie, qui ne peut l'être cõmodément que par les logaritmes, à cauſe des longues multiplications réiterées qu'elle renferme, je prens dans les Tables le Logaritme de (9;) ſçavoir (09542425) que je multiplie par 6 ; pour avoir le logaritme (57254550) de ſa 6e puiſſance, que je mets au premier Lieu d'une Régle de Trois Logaritmique : Je prens enſuite le logaritme de 10 ; ſçavoir (10000000) que je multiplie pareillement par 6, pour avoir le logaritme (60000000) de la 6e puiſſance de 10, lequel je mets au ſecond Lieu de la Régle, & mettant au 3e le logaritme ſimple du Fond 375 liv. ſçavoir (25740313,) je ré-

ſous cette régle comme celle de l'article 3 cy-devant, ajoutant les deux derniers logaritmes en une ſomme (85740313, dont je retranche le 1r : ce qui me donne pour reſte le logaritme (28485763,) lequel étant cherché dans les Tables répond à (706 liv.) à moins d'une liv. près.

Si l'on avoit voulu des ſols & deniers, il auroit fallu réduire la ſomme 375 livres en deniers, & opérant comme ci-deſſus, on auroit trouvé au lieu de 706 liv. (705 liv. 12 ſols 7 den.) pour réponſe.

Si au contraire une perſonne qui s'eſt obligée de payer 706 livres à la fin de ſix années, s'offre de payer dès le commencement de la premiere une ſomme comptant, mais qui eſt encore inconnuë, à condition qu'on lui tiendra compte des intereſts & intereſts d'intereſts de cette même ſomme pendant les 6 années, à l'intereſt ou denier 9. Pour trouver quelle eſt cette ſomme inconnuë que le debiteur deſire de payer comptant, on fera cette Régle de proportion; [Si la ſixiéme puiſſance de 10 donne la 6e puiſſance de 9, que donnera la ſomme dûë 706 liv.] Il viendra au 4e terme 375 liv. pour la ſomme que l'on cherche. Et cette régle de proportion n'eſt que la renverſée de la précédente, comme il eſt bien manifeſte.

5e EXEMPLE.

Sur la Diviſion égale des raports.

Si	donne	combien	*Réponſe.*
03180808	03333333	28485763	28638288
			731 livres.
Si	donne	combien	28676418
03976010	04166665	28485763	737 livres.
Si	donne	combien	28554585
332867	356164	28638288	734 livres.

Si l'on ajoute des mois & même des jours aux 6 années, comme par éxemple 4 mois & 13 jours; il faut trouver d'abord le fond augmenté (706 l.) pendant les 6 années, provenant du premier Fond ou capital 375 liv. comme nous avons fait, & chercher enſuite le fond total accru, à la fin des 4 mois ajoutez aux 6 années, provenant du fond 706 accru pendant 6 ans, par cette Régle de proportion, laquelle eſt tirée de la proportion qui eſt entre 4 mois propoſez, ou $\frac{1}{3}$ d'année & un an, ou 12 mois, qui réglent les intereſts. [Si la 3e racine, ou la racine Cubique de 9, donne la 3e racine de 10; que donnera le fond 706 liv. de 6. années ?] Or le tiers du logaritme de 9, ſçavoir (03180808,) eſt le logaritme de ſa racine 3e, ou cubique, & le tiers du logaritme de 10; ſçavoir (03333333) eſt auſſi le logaritme de ſa racine cubique. Je mets donc ces deux logaritmes aux deux 1^rs^ lieux d'une régle de proportion, & celui du fond accru 706 l. ſçavoir (28485763) au 3e. Ainſi [Si 03180808 | donne 03333333, || que donnera 28485763 ?] il vient au 4e terme 28638288, qui eſt le logaritme de 731 liv. environ; & c'eſt le dernier fond 706 liv. accru pendant les 4 mois ajoutez aux 6 années. Ce ſera la même méthode à proportion pour 6 mois ou $\frac{1}{2}$ année, pour trois mois ou $\frac{1}{4}$ d'année pour 1 mois, ou $\frac{1}{12}$ d'année, en prenant les racines 2es, 4es & 12es de 9 & de 10, comme nous en avons pris les racines 3es des mêmes nombres 9 & 10.

Mais pour nn nombre de mois qui n'eſt pas partie éxacte de 12 mois, comme pour cinq mois; on conſiderera, que pour 1 mois après 6 années, l'augmentation du dernier fond accru 706 livres, doit ſe faire dans la proportion de la douziéme racine de 9, à la 12e de 10. Donc pour cinq mois,

après 6 années, l'augmentation du même fond 706 liv. doit ſe faire dans la proportion de la 5e puiſſance de la 12e racine de 9 : à la 5e puiſſance de la 12e racine de 10. Or les 12es parties des logaritmes de 9 & de 10, ſçavoir (0079520,) & (0083333,) ſont les logaritmes des 12es racines de 9 & de 10. Prenant donc chacune de ces douziémes parties cinq fois, on aura (0397600,) (0416665) pour les logaritmes des 5es puiſſances des douziémes racines de 9 & de 10, que l'on mettra au 1r & 2d lieu de la régle de proportion, & au 3e le logaritme du fond accru 706 liv. ſçavoir (2848576 3 :) ce qui donnera pour 4e terme (2867641 8,) qui eſt le logaritme de 737 livres ; & c'eſt le dernier fond 706 livres accru, pendant les cinq premiers mois, après 6 années conſecutives.

Enfin, pour avoir l'augmentation du dernier fond 731 liv. pendant 13 jours ajoutez aux quatre mois, qui ont produit 731 l. & qui ont ſuivi les 6 années, il faut remarquer, qu'un jour étant la 365e partie d'un an civil, l'augmentation pour un jour ſe fera dans la proportion de la 365e racine de 9, à la 365e racine de 10 ; & pour 13 jours dans la proportion de la 13e puiſſance de la 365e racine de 9, à la 13e puiſſance de la 365e racine de 10. Or la 365e partie du logarit. de 9 eſt ($26143\frac{230}{365}$, qui étant multipliée par 13, donne (539867,) qui eſt le premier lieu de la régle de proportion : de même la 365e partie du logaritme de 10 eſt ($27397\frac{24}{365}$,) qui étant multipliée par 13 donne (556164,) qui en eſt le ſecond lieu, & (28638288) logaritme du dernier fond 731 liv. eſt le 3e, qui donne au 4e (28554585,) logaritme de 734 liv. nombre déſiré.

Théorie des Logaritmes & de leurs opérations.

VI. Si l'on range au droit d'une Progreſſion géométrique, commençant à l'unité une Progreſſion Arithmétique qui commence à zéro comme celles-cy,

1	(1.) 3.	(9.)	(27.)	81.	(243.)	729.	&c.
2	(0.) 1.	(2.)	(3.)	4.	(5.)	6.	&c.

la premiere progreſſion s'appellera alors les Nombres natnrels, & la derniere leurs Logaritmes. Or il a été démontré dans les théories des Progreſſions, que ſi l'on prend entre leurs termes deux nombres quelconques, comme 1 & 9, & 2 autres à volonté; ſçavoir 27 & 243, en laiſſant autant de termes entre ces 2 derniers, que'ntre les 2 1rs, ces 4 nombres, pris (1 | 9 | 27 || 243) formeront encore une proportion. De ſorte que ſi c'eſt dans la Progreſſion géométrique que l'on ait pris ces quatre nombres, & que le premier terme choiſi ſoit l'unité; alors le ſeul quatriéme terme (243) ſera égal au produit des deux moyens 9 & 27, comme on l'a prouvé dans le chapitre précédent : & ſi c'eſt dans la progreſſion aritmétique que l'on ait pris les quatre nombres, & que le premier des quatre ſoit zéro, comme (0. 2 | 3. 5 ;) alors le dernier terme 5 ſera égal à la ſomme des deux moyens 2 & 3, comme on l'a démontré dans le même chapitre. Si donc les quatre termes (0. 2 | 3. 5) ſont les correſpondans ou les Logaritmes de (1 | 9 || 27 | 243) il eſt évident qu'il y aura auſſi autant de termes

laiſſez entre 3 & 5, qu'entre 0 & 2. Donc dans les Logaritmes la ſomme des deux Logaritmes (3 & 2) des deux multiplicateurs 9 & 27, eſt toujours égale au Logaritme 5 de leur produit (244.)

Or la multiplication par les Logaritmes étant entenduë, la formation des Puiſſances, c'eſt-à-dire des quarrez, des Cubes, &c. (qui n'eſt qu'une veritable multiplication,) l'eſt auſſi, & la diviſion, avec l'Extraction des Racines par les Logaritmes, qui ſont des opérations contraires à ces premieres, le ſont encore par conſequent.

A l'égard des Intereſts d'intereſts, il faut remarquer que le nombre 9, qu'on appelle l'intereſt ou le denier repreſente toujours le ſort principal, ou le capital 375 l. & (1) le 1r intereſt, ou la 9e partie de 375 liv. ſçavoir 41 liv. 13 ſols 4 den. ainſi ajoutant l'unité au denier (9,) on aura 10 qui marquera le fond de la fin de la premiere année, ſçavoir (416 liv. 13 ſols 4 den. & l'augmentation du fond pour un an, ſera dans la proportion de 9 à 10. Or ce fond accru étant, auſſi-tôt l'année échûë, remis à profit, profitera à la fin de la ſeconde année, encore à raiſon de 9 à 10 de même que le premier; & ainſi de ſuite pour chaque année. Donc tous les fonds, à commencer au 1r Fond 375 l. y compris, & continuant juſqu'à la fin des années propoſées, compoſeront une Progreſſion géométrique de ſept termes pour 6 années, dans le raport de 9 à 10. Si le denier étoit à 7 pour 100, l'expoſant de la progreſſion des Fonds, capital & accrus, ſeroit de 100 à 107, & de même pour tous les autres Intereſts, & pour tant d'années qu'on voudra. Or le premier Fond étant au ſecond comme 9 à 10, & le 2d au 3e auſſi comme 9 à 10; le premier ſera au 3e, comme 81 quarré de 9 eſt à 100 quarré de 10. Car 9 eſt à 10,

comme 81 à 90, & 9 eſt encore à 10, comme 90 eſt à 100 : c'eſt ce qu'on entend, quand on dit que 81 eſt à 100 dans le rapport doublé de 9 à 10. De même le 3e fond étant au 4e toujours, comme 9 à 10 : le premier ſera au 4e comme le Cube ou 3e puiſſance de 9, eſt au cube, ou 3e puiſſance de 10; c'eſt-à-dire comme 729 eſt à 1000. Car comme 9 eſt à 10 ainſi 729 cube de 9, eſt à 810; & encore comme 9 eſt à 10, ainſi 810 à 900; & enfin, comme 9 eſt à 10, ainſi ces 900 à 1000 cube de 10 : & c'eſt ce que l'on entend, lorſqu'on dit que le raport de 729 à 1000 eſt triplé du raport de 9 à 10. On peut donc encore aſſurer, que le premier fond 375 liv. eſt à celui de la fin de la 4e année, comme la 4e puiſſance de 9 ou 6561 eſt à 10000 4e puiſſance de 10, & ainſi de tous les autres Fonds : donc auſſi comme la 6e puiſſance de 9 eſt à la 6e puiſſance de 10 : ainſi le capital 375 liv. eſt au fond 706 l. de la fin de la 6e année : ce qu'il falloit prouver. Et voici ce qui regarde la multiplication des rapports.

Enfin ſi l'on ajoute des mois & même des jours aux années, comme 4 mois & 13 jours, pour ſçavoir quel doit être le fond accru de 375 l. après 6 années 4 mois & 13 jours au même intereſt ou denier 9, ou à raiſon de 9 à 10 pour un an ou 12 mois, ou 365 jours, je conſidere que le fond 706 ll. provenu des 6 1res années, conſideré comme un premier fond, doit être au fond après 4 mois, qui ſont le tiers d'une année, comme la racine cubique ou 3e de 9 eſt à celle de 10; puiſque s'il y avoit 3 ans, au lieu de $\frac{1}{3}$ d'année, le même fond 706 liv. ſeroit au fond accru, après ces 3 années, comme le Cube de 9 au Cube de 10; & cela afin de conſerver la proportion de raiſon : c'eſt le même raiſonnement pour toutes les autres diviſions de raports.

Fin de la premiere Partie.

SECONDE PARTIE D'ARITHMETIQUE

Qui contient les régles dont l'uſage eſt moins étendu.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Extraction des Racines quarrées des Entiers, & des entiers joints avec des parties.

Nombres naturels, ou Racin.	Quarrez des nomb. naturels.
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81

ART. I. POur parvenir à tirer les Racines quarrées des nombres, il faut apprendre par mémoire les Quarrez des 9 premiers nombres naturels ou Elémentaires (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,) ſçavoir (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81,) qu'on trouve dans la Table ci-jointe, & qui ſe forment en multipliant chaque nombre Elémentaire (1, 2, 3 &c) par lui-même. Ces mêmes nombres Quarrez ſe trouvent auſſi dans la table que nous avons donnée dans la 1re Partie pour la Multiplication & la Diviſion, Chapitre 3. Ainſi nous pouvons même ſuppoſer ici ces Quarrez connus; & ce n'eſt que pour en rappeller le ſouvenir, que nous les avons ici raſſemblez.

1er EXEMPLE.

Sur les Racines quarrées des entiers.

Somme à extraire.

3	57	00	00	00	*Racine*
1					18894
2	57				
	28				
	23	00			
	3	68			
	3	56	00		
		37	69		
		16	79	00	
		3	77	84	
Reste		1	67	64	

Un nombre quelconque cõme (357000000) étant donc propoſé pour trouver ſa racine quarrée, c'eſt-à-dire le nombre qui étant multiplié par lui-même produit (357000000,) ſupoſé qu'il y ait un tel nombre ;) ſinon le nombre qui produit un nombre moindre que (357,000,000,) mais qui étant ſeulement augmenté d'une unité, & enſuite multiplié par lui-même produit un nombre plus grand que (357000000 :) c'eſt-à-dire en un mot pour trouver la racine veritabe de (357000000) s'il en a une ; ou s'il n'y en a point, le nombre entier plus petit qui en approche le plus ; on partagera ce nombre de deux chiffres en deux chiffres, à commencer du côté droit, & continuant vers la gauche, comme on le voit dans le premier éxemple ; ſçavoir avec des barres qui aillent de haut en bas. On commencera enſuite l'Extraction en tirant la racine quarrée du nombre (3) qui eſt ſeul dans la premiere tranche à gauche, ou plûtoſt du nombre quarré le plus proche au deſſus. (à cauſe que 3 n'eſt pas un nombre quarré) Ce quarré le plus proche au deſſous de 3 eſt (1,) dont la racine eſt auſſi (1,) que j'écris dans un Quotient à côté, comme

comme dans la Diviſion, & en même-temps ſous le (3.) Et pour avoir le reſte, ou le ſurplus du nombre (3) ſur (1,) je multiplie le quotient (1) par l'(1) écrit ſous le 3, le produit eſt (1,) que j'ôte de (3;) ce qui me donne (2) de reſte, que j'écris ſous l'(1) de l'extraction : le tout comme dans la diviſion.

Je paſſe enſuite à la tranche ſuivante, dont je deſcends les deux chiffres 5 & 7 à côté du reſte (2) & doublant tout le quotient (1,) j'écris le double (2) de ce quotient ſous le premier chiffre 5 de cette 2e tranche. Je diviſe enſuite le reſte 2 avec ce 5 par ce double (2,) le quotient eſt 8, que j'écris à la ſuite du premier quotient (1) comme dans la diviſion : ce qui donne (18) pour le quotien entier. J'écris auſſi le même quotient (8) à la ſuite du double (2) ſous le ſecond chiffre (7:) ce qui donne (28) pour le diviſeur entier. C'eſt pourquoi je multiplie tout ce diviſeur (28) par le dernier quotient 8, pour avoir le reſte de cette Extraction, diſant [8 fois 8 font 64; que j'ôte de 67, le reſte eſt 3,] que j'écris ſous ce 8, retenant 6 d'emprunt. Enſuite [8 fois 2 font 16, & 6 que je retiens font 22 que j'ôte de 25, le reſte eſt 3,] que j'écris ſous le 2 à l'ordinaire. Ainſi le reſte total eſt (33;) à la ſuite duquel je deſcends les deux zéros de la 3e tranche, pour avoir la nouvelle ſomme à extraire 3300, & continuer l'extraction.

Je double donc encore tout le quotient (18) & j'écris le double 36 ſous le reſte (3300; ſçavoir toujours le dernier chiffre 6 ſous le premier chiffre zéro de la 3e tranche, & diviſant 330 par 36 à l'ordinaire, le quotient eſt encore (8,) que j'écris à la ſuite du quotient trouvé (18,) & en même-temps ſous le ſecond zéro, pour avoir le diviſeur total (368.) Et pour trouver le reſte de cette

Preuve.

1 8 8 9 4
1 8 8 9 4

7 5 5 7 6
1 7 0 0 4 6 4
1 5 1 1 5 2 6
3 5 1 1 5 2 7
1 8 8 9 4 6
1

3 5 7 0 0 0 0 0 0

Pour en avoir la preuve, il ne faut que multiplier cette racine trouvée 18894, par elle-même ; c'eſt-à-dire par 18894, & ajouter au produit le Reſte ci-deſſus 16764 de l'Extraction, le total rendra le nombre propoſé (3570 00000,) Si l'on ne s'eſt point trompé, comme on le voit icy.

2d EXEMPLE.

1 00 89 } 100
1
0 00
20
00 89
2 00
89

1re Preuve.

1 0 0 8
1 0 0

1 0 0 0 0
8 9

1 0 0 8 9

II. Soit encore un nombre d'hommes (10089, que l'on veut ranger ſous une figure quarrée pleine : ayant partagé ce nombre par tranches binaires, comme dans le 1er exemple, & tiré la racine quarrée de ſa premiere tranche, qui eſt (1 ;) ſçavoir (1,) & l'ayant miſe au quotient & ſous ce premier chiffre (1,) ayant multiplié l'un par l'autre, & ôté le produit de la premiere tranche 1, pour avoir le reſte de l'Extraction, qui eſt zéro, on deſcendera à la ſuite de ce zéro les deux zéros de la ſeconde tranche, & l'on écrira encore deſſous le double du quotient (1 ;) ſçavoir 2 toujours ſous la premiere place à gauche proche la barre, pour diviſer zéro par ce 2 : ce qui donne

au quotient zéro, qu'on écrit après le premier quotient (1,) & à côté du diviſeur (2.) Multipliant enſuite le diviſeur total 20 par ce quotient zéro, & ôtant le produit (zéro) du dividende (000,) le reſte eſt zéro, qu'on écrit ſous 20 ; & l'on deſcend la troiſiéme tranche (89) à côté de ce reſte (00,) comme ci-devant. Doublant donc tout le quotient (10,) il vient le diviſeur (20) que l'on écrit ſous le dividende (080,) ſçavoir toujours le dernier chiffre (0) ſous la premiere place à gauche, à côté de la barre, & le 2 ſous le zéro précédent. Et diviſant (0) par (2,) le quotient eſt encore (0,) qu'on écrira à la ſuite de (10) & du diviſeur (20.) Enfin multipliant le diviſeur total (200) par ce dernier quotient zéro, le produit eſt zéro, qui étant ôté de 89, le reſte de l'extraction eſt encore (89 :) & la racine deſirée la plus proche en deſſous eſt 100 : ce qu'on peut prouver, en ce que ſi l'on multiplie 100 par 100, le produit eſt (10000,) auquel ajoutant le reſte de l'extraction (89,) il vient le nombre propoſé (10089.) Et ſi au lieu de la racine trouvée 100, on prend pour racine ſeulement) 101, (& qu'on multiplie enſuite 101 par 101, le quarré ſera (10201) qui eſt plus grand que le nombre propoſé (10089 (de (112.)

2e Preuve.

1 0 1	
1 0 1	
1 0 1	
1 0 1 0	
1 0 2 0 1	
1 0 0 8 9	
1 1 2	

Sur les Racines quarrées des Entiers, avec des Parties.

III. Remarquez que quand il s'agit de comparer les racines des deux longueurs, comme celle de (3 toiſes, 5 pieds, 8 pouces, 7 lignes,) avec celle

de (4 toiſes, 3 pieds, 9 pouces, 8 lignes,) il ſuffit de réduire chacune de ces longueurs en mêmes petites parties, ſçavoir icy en lignes courantes : ce qui donne (3415) lignes pour la premiere & (4004) pour la ſeconde ; dont on tirera les racines quarrées, ſçavoir 58 lignes pour la racine de (3 toiſes, 5 pieds, 8 pouces, 7 lignes,) & 63 lignes pour la racine de (4 toiſes, 3 pieds, 9 pouces 8 lignes,) ſuivant les régles précédentes.

On peut éviter en ce cas de tirer deux racines quarrées, en multipliant (3415) par (4004) ci-deſſus ; & tirant la ſeule racine quarrée du produit (13673660,) ſçavoir 3698, laquelle tiendroit lieu de la racine (63) cy-deſſus, tandis que (3415) lui-même, tiendroit lieu de 58 ; ou cette même racine tiendroit lieu de 58, & 4004 luy-même, tiendroit lieu de 63. Mais quoiqu'on ſauve par là une extraction de racine quarrée, on n'abrege ſouvent cependant le calcul de rien ; en ce qu'il faut tirer la racine d'un tres-grand nombre ; & ſe ſervir de termes fort élevez, ſçavoir (3415) & (3698,) ou (3698) & (4004, au lieu des termes ſimples 58 & 63 : ce qui augmente extrémement tous les calculs ſuivans : ces nombres élevez ne pouvant ordinairement ſe rabaiſſer à de plus ſimples. D'ailleurs l'extraction de la Racine quarrée n'a rien de plus difficile que les ſimples multiplications & diviſions, comme on l'a vû par les deux éxemples précédens.

A l'égard des Racines quarrées des toiſes quarrées, pieds, pouces & lignes pris abſolument, & ſans les comparer à rien, c'eſt une queſtion qui ne regarde que la Géométrie-pratique : c'eſt pourquoi nous n'en traiterons que dans notre Géométre Théori-pratique.

Sur l'approximation indéfinie des Racines quarrées.

IV. Lorſqu'on veut avoir la racine d'un nombre avec plus de préciſion qu'à moins d'une unité près, comme celle de 357, à moins d'une millieme partie d'unité, on ajoute au nombre propoſé 357 le double des zéros qui ſont dans la partie donnée; ainſi $\frac{1}{1000}$ ayant 3 zéros dans ſon dénominateur, on en ajoute 6 à 357: ce qui donne (357000000) dont on tire la racine quarrée, comme dans le premier article, ſçavoir (18894) que l'on diviſe enſuite par le dénominateur (1000) propoſé; ce qui ſe fait en retranchant ſeulement les trois dernieres figures de 18894, & écrivant 1000 deſſous, comme dans la diviſion par 1000. Ainſi la racine de 357 eſt 18, & $\frac{894}{1000}$ à moins d'une milieme partie d'unité. Si on vouloit la même racine à moins d'$\frac{1}{10}$ ou de $\frac{1}{100}$, ou de $\frac{1}{10000}$, &c. d'unité, on ajouteroit alors deux zéros, ou 4, ou 8, &c. au nombre propoſé, & l'on diviſeroit enſuite la racine trouvée par 10, ou par 100, ou par 10000, en retranchant ſon dernier chiffre, ou les 4, ou les 8 derniers, & mettant 10 ou 100, ou 10000 ſous le reſte à l'ordinaire.

$$\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{r} 58 \\ 58 \end{array}\right\} \\ \hline 5 \times 500 + \begin{array}{r} 8 \times 50 \\ 8 \times 50 \end{array} + 8 \times 8 \\ \hline \left\{\begin{array}{r} 64 \\ 400 \\ 400 \end{array}\right\} \\ \left|\begin{array}{r} 2500 \\ \hline 3364 \end{array}\right| \end{array}$$

Théorie.

V. Pour entendre la pratique du premier article, il faut ſçavoir de quels produits le quarré d'un nombre propoſé quelconque (comme par exemple de 58) eſt compoſé & quelles places oc-

cupent ces produits dans l'expreſſion de ce quarré. Or il me paroît qu'on ne peut pas mieux le connoître, qu'en multipliant ce nombre 58 par luy-même; c'eſt-à-dire qu'en formant ce même quarré, ſans mêler les produits : C'eſt pourquoi multipliant d'abord 8 par 8 à l'ordinaire, j'exprime le produit (64) en cette maniere (8 м 8,) dans laquelle forme les deux produiſans 8 & 8 paroiſſent toujours; au lieu que dans l'expreſſion (64,) ces deux produiſans ſont évanouis. Je multiple enſuite 5 par 8, & tout de ſuite 8 par 5, dont je marque les 2 produits (40) de la même maniere, ainſi (5 м 8.0) & (8 м 5.0;) mais j'ajoute un zéro à chaque produit, à cauſe que chaque multiplicateur (5) a un zéro après lui, qui eſt remplacé par le 8 qui le ſuit; & je ſepare ces deux produits du premier par la marque d'addition (†,) qui avertit qu'on doit les ajouter dans la ſuite. Enfin je multiplie le 5 par le 5, & j'exprime encore le produit 25 ainſi (5 м 5.00, en y ajoutant 2 zéros à la ſuite; à cauſe que chacun de ces deux multiplians 5, en a un après luy; & je ſepare ce dernier produit des précédens, par la même marque d'addition (†.) J'écris enſuite le produit 64, & ſous luy les deux produits 40 & 40, avec chacun un zéro à leur ſuite, & encore au deſſous le produit 25, ſuivi de 2 zéros dans l'ordre de l'Addition, & j'en fais une ſomme (3364,) qui eſt le quarré de 58 propoſé. Cette opération me fait donc voir que ce quarré contient dans ſa premiere place (4) à droite, & dans les précédentes le quarré (64) du premier chiffre à droite de ſa racine, ſçavoir (8:) que dans la place précedente 6 vers la gauche & dans les chiffres encore plus avancez, il contient deux fois le produit du premier chiffre 8 par ſon précédent 5; ou le ſimple produit

du double de 5 par 8, qui eſt la même choſe. Et qu'enfin dans ſa troiſiéme place (3,) & dans les précédentes, il contient le quarré de ce même ſecond chiffre 5, & de même pour tout autre nombre quarré, ou regardé comme tel, dont la racine ne contient que deux caracteres.

2. A l'égard de ceux dont la racine en contient d'avantage, comme le quarré (3|57|00|00|00) de 18894, (ou du moins qui eſt regardé comme un quarré,) il eſt évident qu'on peut de cette racine 18894, ne faire que deux parties, ſçavoir (1889) & (4,) dont la premiere à droite ne contiendra que ſon premier chiffre (4) de ce côté; & la 2e contiendra tous les précédens. Cela étant, on peut donc aſſurer auſſi par même raiſon que le quarré propoſé (357,&c.) contient dans ſa premiere place (0) à droite,& dansl es précédentes, (&c. 700000,) le quarré de ce premier chiffre 4; dans la deuxiéme place zéro vers la gauche, & dans les précédentes (&c. 70000,) le produit du double de la ſeconde partie (1889) par le 2e, 4; & enfin dans la 3e (0) vers la gauche, & dans les precedentes, ſçavoir dans (&c. 7000) le quarré de cette même partie (1889.) Diviſant donc de même cette premiere partie (1889) en deux autres (188) & (9) dont la premiere à droite ne contienne que ſon dernier chiffre 9, & la deuxiéme (188) tous les précédens, il eſt manifeſte que le quarré de 9 commencera dans cette même 3e place (0) vers la gauche,& s'étendra dans les précédentes, (&c. 7000;) que le produit du double de 188 par (9) commencera dans la 4e place (0) du même côté, & s'étendra ſur les précédentes, (&c. 5700,) & que le quarré de (188) commencera dans la cinquié-

1. 8. 8. 9. 4.

me place (0) qui précéde, & s'étendra ſur toutes les précédentes, ſçavoir dans (&c. 570.) Et diviſant de même (188) dans les deux parties (18) & (8,) on verra que le quarré de la partie (8) commence encore dans cette même cinquiéme place(0,)& s'étend dans les précédentes, (&c. 570;) que le produit du double de 18 par 8, commence dans la ſixiéme (0) qui précéde, & s'étend ſur les précédentes (357,) & que le quarré de 18 commence dans la ſeptiéme (7) & s'étend ſur les précedentes; ſçavoir (35.) Enfin faiſant de (18) les deux parties 1 & 8, on verra de même que le quarré de 8, commence toujours dans cette même 7e place (7,) & s'étend ſur les précédentes (35,) & que le produit du double de (1) par 8 commence dans la huitéme (5,) & s'étend ſur la précédente 3; & qu'enfin le quarré de (1) ſe trouve dans la neuviéme place (3,) & qu'il s'étendroit auſſi ſur les précédentes, s'il y en avoit eu davantage, & de même à l'infini.

D'où il eſt manifeſte qu'ayant partagé un nombre propoſé, comme quarré de 2 en 2 tranches, de droite à gauche ainſi, (3 | 57 | 00 | 00 | 00,) le quarré du premier chiffre 4 à droite de ſa racine 18894 commence dans ſa premiere place (0) de ce côté; celui du ſecond (9) dans la 3e place (0) qui précéde vers la gauche; celui du troiſiéme (8) dans la 5e (0;) celui du 4e (8) dans la 7e; celuy du cinquiéme (1) dans la 9e (3;)c'eſt-à-dire toujours au commencement de chaque tranche du côté droit; & que dans la 2e place de chaque tranche du côté gauche, commence toujours le produit de ce même chiffre de la racine dont le quarré eſt à droite par le double de tous ſes précédens vers la gauche. Ainſi (par éxemple dans la premiere place (3) à gauche commence le quarré du

premier chiffre (1) à gauche de la racine : dans la ſeconde (5) commence le produit du double de 1 par 8, lequel s'étend auſſi ſur le 3 ; dans la 3e (7) commence le quarré de 8, lequel s'étend ſur les précêdens 3 & 5 ; dans la 4e (0) commence le produit du double de 18 par le 3e chiffre 8 de la racine, & s'étend ſur les précédens ; & dans la cinquiéme (0) commence le quarré du même chiffre (8) qui s'étend ſur les précédens ; dans la ſixiéme (0) commence le produit du double de 188 par 9, & dans la ſeptiéme (0) le quarré de (9,) leſquels s'étendent de même ſur les précédens, & ainſi de ſuite à l'infini.

Cela fait voir la raiſon pour laquelle, après avoir partagé le nombre propoſé (3 | 57, &c) de deux chiffres en deux chiffres, en commençant à droite ; on prend d'abord la racine (1) de toute ſa premiere tranche vers la gauche, qui eſt (0. 3 ;) ſçavoir, parce que cette premiere tranche contient le quarré du premier chiffre de ſa racine. On voit de plus pourquoi l'on joint ce qui reſte de cette premiere tranche avec le premier chiffre 5 de la ſuivante, afin de diviſer le tout par le double de la racine trouvée (1,) & pourquoi cette diviſion donne le ſecond chiffre de la racine ; ſçavoir parce que le produit du double du premier chiffre (1) de la racine propoſée par ſon ſecond 8, commence dans cette ſeconde place (5) & s'étend dans les précédentes à gauche, comme on l'a dit. C'eſt pour cela auſſi qu'ayant ce ſecond chiffre 8, il faut le multiplier par le double du premier (1,) & ôter le produit des mêmes chiffres reſtans (25,) & qu'il faut encore former le quarré de ce quotient (8,) & l'ôter de la troiſiéme place 7 vers la droite, & des précédentes ; puiſque ce quarré eſt contenu dans ces mêmes places ; & cela afin d'avoir le reſte

33 de cette ſeconde extraction, lequel appartient aux chiffres ſuivans ; & de pouvoir continuer la troiſiéme extraction, en y joignant la tranche ſuivante (00,) doublant, comme on l'a dit dans la pratique, tout le quotient (18,) diviſant la quatriéme place (0) vers la droite, & ſes précédentes par ce double 36, pour avoir le troiſiéme chiffre (8) de la racine, puiſque le produit de ce double quotient 36, par ce 3e chiffre (8) y eſt contenu. D'où il ſuit qu'il faut encore former ce produit de 36 par 8, & l'ôter de cette quatriéme place & de ſes précédentes, & ôter auſſi le quarré du même 3e chiffre (8) de la racine cherchée de la 5e place (0) & des précedentes, où il eſt auſſi contenu ; & cela afin d'avoir le reſte (356) de cette 3e extraction qui appartient à la 4e tranche, & continuer la quatriéme & toutes les autres, comme les précédentes.

Il ne ſera pas inutile de faire remarquer ici une proprieté des racines quarrées ; ſçavoir; Que la racine quarrée d'un nombre quelconque, comme 6 racine de 36, partage en deux rapports égaux, tous les raports des produiſans de ce même nombre. Ainſi 36 étant le produit de 1 par 36, de 4 par 9, de 2 par 18, & de 3 par 12 ; le raport de 1 à 36 eſt partagé en deux raports égaux par la racine 6 ; puiſque le raport de 1 à 6 eſt le même que celui de 6 à 36 ; de même 4 eſt les $\frac{2}{3}$ de 6, comme 6 eſt les $\frac{2}{3}$ de 9 ; 2 eſt le tiers de 6, comme 6 eſt le tiers de 18 ; enfin 3 eſt la moitié de 6, comme 6 eſt la moitié de 12. Toutes ces proportions ſont fondées ſur ce que nous avons dit en parlant des Progreſſions ; ſçavoir : Qu'en toute progreſſion géométrique de trois termes, le quarré du terme moyen, appellé Moyen géométrique ; ſçavoir ici le quarré de 6 eſt toujours égal au

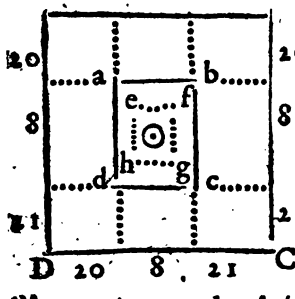
produits des deux termes extrêmes 1 & 36, ou 4 & 9, ou 2 & 18, ou 3 & 12. Car il ſuit delà que toutes les fois que le quarré d'un nombre eſt égal au produit de deux autres nombres, on peut toujours de ces trois nombres faire une progreſſion géométrique, dont le ſecond ſera le Moyen géométrique ainſi (1||6||36,) (4||6||9,) (2||6||18) (3||6||12,) & de même de tous les autres quarrez. C'eſt ce qu'on entend, lorſqu'on dit que le raport d'un nombre quarré a l'unité, comme de 36 à 1. eſt toujours doublé de celui de ſa racine 6, à l'unité; ou quecelui de cette racine à l'unité eſt ſoudoublé de celui de ſon quarré à l'unité. On voit delà que pour couper le raport de deux nombres quelconques, comme 3 & 12, en deux rapports égaux, il ne faut que prendre leur produit 36, & de ce produit tirer la racine quarrée 6; & alors le raport de 3 à 6, ou de 6 à 12, ſera la moitié préciſément du raport propoſé de 3 à 12, & de même pour tout autre nombre. Mais ces diviſions de raports en tant de raports égaux que l'on veut, ne ſe font aiſément que par le moyen des Logarithmes, comme on l'a dit dans la premiere Partie.

3. Enfin quant à ce qui regarde l'approximation indéfinie desracines, avec une fraction jointe à un Entier, il ne faut que ſe ſouvenir de ce qu'on a dit dans la multiplication des Entiers; ſçavoir que quand ou multiplie deux nombres entr'eux, qui contiennent chacun des zéros à leur ſuite, comme 10 par 10, ou 100 par 100, ou 1000 par 1000, &c. on ajoute au produit tous les zéros des deux multiplicateurs. D'où il ſuit que le produit de 10 par 10, ou ſon quarré 100, a le double des zéros de ſa racine 10; de même le quarré de 100; ſçavoir 10000 a le double des zéros de 100; le quarré de 1000; ſçavoir 1000000 a le double

des zéros de 1000; & en général un quarré a toujours le double des zéros de ſa racine. Lorſqu'on a donc multiplié un nombre quelconque, comme (357) par ſix zéros, ſa racine eſt préſuppoſée multipliée par 3 zéros. C'eſt pourquoi lorſqu'on a trouvé la racine de (357000000) ainſi multiplié, ſçavoir 18894, il faut encore la diviſer par 1000, pour avoir celle de 357, que l'on cherche; & par cette même raiſon ſi l'on eût ajouté ſeulement quatre zéros à 357, il auroit fallu diviſer la racine trouvée 1889 ſeulement par 100, & ainſi des autres.

3e EXEMPLE.

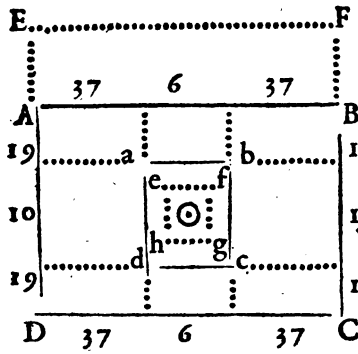
De la maniere de former des Quarrez parfaits & des Quarrez longs partie pleins & partie vuides, par des arangemens d'unitez.



VI. Soit premierement un nombre quelconque d'hommes (2378) qu'il faut ranger ſous la figure d'un quarré A B C D, lequel ſoit vuide dans ſon milieu en *a b c d*, enſorte que le côté *a b* du quarré vuide contienne 10 hommes. Pour y parvenir j'ôte toujours 2 du côté *a b* de 10, il reſte 8, dont je forme le quarré 64, qui eſt le quarré *e f g h*, retranché autour du centre O du quarré propoſé: J'ajoute enſuite ces 64 avec les 2378 hommes propoſez, qui doivent compoſer la couronne A B C D *a b c d*, la ſomme eſt 2442 hommes en tout, que devroit contenir le quarré propoſé ABCD O, s'il étoit plein. Tirant donc la racine quarrée de

ce nombre (2442) par le premier & 2d articles ci-devant ; il vient 49 hommes, qu'il faut ranger ſur chaque côté AB, AD, & les autres de File, en laiſſant le quarré vuide *e f g h*, dont les Files ſont de 8 chacune, & il reſte encore 41 hommes, qu'on peut ajouter à un des côtez exterieurs du grand quarré.

4e EXEMPLE.



VII. Soit encore un nombre d'hommes quelconques (3781) qu'il faut ranger ſous la figure de Quarré long ou Rectangle A B C D, dont la longueur A B ait même propottion à la hauteur A D, que 5 à 3, & dont le vuide *a b c d* autour du centre O ait 8 hommes de front en *a b*, & 12 de hauteur en *b c*. Pour y parvenir je prens le Front *e f*, & la Hauteur *f g*, du rectangle interieur, qui ſont de 6 & de 10, que je multiplie entr'eux : ce qui donne 60 pour le rectangle retranché *e f g h* : lequel j'ajoute avec lenombre d'hommes propoſé (3781) pour avoir le Quarré long A B C D de (3841.) Je fais enſuite cette régle de proportion [ſi AD donne A B, ou ED (égale à A B,) ou ſi (3) donnent 5, que donnera le rectangle plein A B C D de 3841 ?] Il viendra 6401 pour la valeur du quarré EDCF, qui auroit le même front DC, que ABCD. Tirant donc maintenant la racine quarrée de 6401, il vient 80

pour la longueur ou le front DC du rectangle proposé ; & de plus, un homme de reste. Je fais ensuite cette seconde régle de proportion : [Si 5 donne 3, combien donnera AB de 80 ?] Il viendra au quatriéme terme (48) pour la hauteur BC du rectangle ABCD : ce qui restoit à faire. Le reste est aisé à aranger, & la Théorie se découvre d'elle-même.

On peut encore à l'aide des racines quarrées, tirer les Racines Triangulaires & Exagonales des nombres entiers en cette maniere.

Pour les Racines Triangulaires.

1000
8
8000
1
80|01 } 89
10|01
1|69 1
~~80~~ 88
côté desiré 44
du Triangle.

44
44
176
176
1980
990
aire du triangle.

VIII. Soit un nombre quelconque d'unitez telles qu'on voudra comme des hommes, &c. sçavoir 1000, dont on véuille former un Triangle Equilateral ABC, autant que ce nombre peut le permettre ; la régle générale est de multiplier toujours le nombre donné 1000 par 8, & d'ajouter 1 au produit : ce qui fait 8001 dont il faut tirer la racine quarrée, à une unité près seulement, par le premier article ci-devant, cette racine se trouve être 89, & on néglige le reste 80. De ces 89 ôtant 1, & prenant la moitié du reste, on a 44 pour le côté desiré du triangle proposé ABC. De sorte que si on met d'abord un homme en A ; ensuite 2 hommes dans un rang D E au-dessus, en faisant

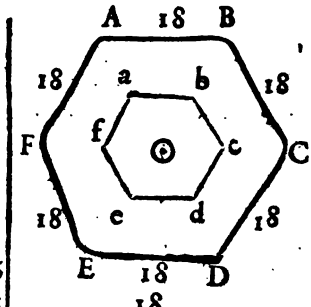
enſuite les trois diſtances AD, AE, DE, égales, & encore au deſſous un ſecond rang FG de 3 hommes à pareilles diſtances, tant entr'eux, qu'avec le trois premiers, & ainſi de ſuite, tant que le nombre propoſé 1000 pourra fournir; on trouvera 44 rangées pareilles à ces deux premieres, & la 44e rangée contiendra 44 hommes.

Et pour trouver tout d'un coup combien il entrera d'hommes dans ce triangle, & combien par conſequent il en reſtera de ſurplus; je multiplie par régle generale 44 par lui-même, & ajoutant les 44 au produit, la ſomme eſt 1980, dont la moitié (990) eſt le total des hommes qui entreront dans la compoſition du Triangle: de ſorte que le ſurplus ſera de 10 hommes ſeulement.

Au reſte on voit bien, que ſi l'on demandoit que ce Triangle eût un triangle vuide *abc*, autour de ſon centre O, dont chaque côté contînt (par éxemple) 10 hommes; il ne faudroit qu'ajouter au nombre 1000 propoſé un triangle Equilateral, dont le côté fût de 8, duquel Triangle on trouverra la valeur de 36 hommes par la régle précédente,) & tirer enſuite la racine Triangulaire de 1036, qui ſe trouvera être 45 par la premiere régle ci-deſſus.

Pour les Racines Exagonales.

IX. Soit encore le même nombre 1000 dont on veuille tirer la racine Exagonale; pour cet effet, la régle generale eſt de multiplier ce nombre par (4) & de retrancher 1 du produit, ce qui fait 3999, dont le tiers eſt 1333; & tirant la racine quarrée de ce tiers en entiers, il vient 36. Négligeant donc le reſte, il faut ajouter 1 à ces 36, & prendre la



1000
4
4000
1
3999
13|33 } 36
4|33 } 1
66
37
37
18
côté
de l'Exagone

18
144 | 972
18 | 1
324 | 973
3 | 54
972 | 919

moitié en entiers du reſte, ſçavoir 18, qui ſera le côté AB deſiré de l'Exagone ABCDEF.

Et pour avoir ſon aire ou ſa teneur je prens le quarré de 18 ſçavoir 324 que je triple, & ajoûtant 1, il vient 973, dont j'ote 3 fois 18, ou 54, le reſte 919 eſt la valeur de cet Exagone; ainſi il y aura encore 81 hommes de reſte.

On peut prendre auſſi le Cube de 18; (qui ſe trouve en multipliant ſon quarré 324 par 18) ſçavoir 5832, & en ôter le Cube de 17; ſçavoir 4913; car le reſte ſera toujours l'aire de l'Exagone 919: ce qui vient d'une proprieté admirable de ces nouveaux nombres Exagones, qui m'a paru inconnuë juſqu'à preſent; ſçavoir que ces nombres ſont les differences mêmes des Cubes des nombres naturels 1, 8, 27, 64, 125, 216, &c. ſçavoir (1, 7, 19, 37, 61, 91, &c.) comme chacun peut s'en convaincre, en conſiderant les Exagones formez par les Quareaux Exagonaux d'une chambre, ou par les Rayons des Abeilles, Frélons, Gueſpes, &c.

On pourra donc auſſi ſuppoſer un Exagone vuide

a b c d e f autour du centre O du propoſé, duquel le côté ſoit d'un nombre d'unitez donné comme de 11 : car il ne faudra que chercher l'aire de l'Exagone retranché, dont le côté eſt de 10 unitez, par une des deux régles précedentes; laquelle aire ſe trouvera de 271, difference des cubes 1000, & 729 de 10, & de 9; & ajoutant 271 à 1000, on cherchera par la premiere des trois dernieres régles le côté de l'Exagone dont l'aire eſt de 1271, lequel côté ſe trouve être de 21, qui donne un Exagone de 1261 de ſuperficie, de laquelle ſi l'on ôte les 271 du vuide, qui eſt autour du centre O, il reſtera (990) pour la valeur de la Couronne A B C D E F *a b c d e f*; ainſi il reſtera encore 10 hommes, qu'on pourra mettre dans le centre de la figure, ſinon où l'on voudra.

Ces Exagones ont encore cette proprieté; qu'ils ſont plus difficiles à rompre par l'ennemi, qu'un Quarré : Car ſuppoſant que l'ennemi attaque de front le côté AB par une ligne droite, il aura encore le feu des 2 côtez BC, AF à ſoutenir; ainſi il y aura 54 hommes qui lui feront tête; au lieu que ſi les 1000 hommes avoient été mis en quarré plein, il n'auroit eu que 30 hommes à combattre de front; & s'il attaque les deux fronts BC, CD, en même-temps, il n'en aura à la verité que 36 à combattre; mais pour les rompre, il faudra qu'il ſe rompe lui-même auparavant, & qu'il les combatte en deſordre : ce qui lui fera perdre un très-grand avantage. De plus, les angles ABCDEF de ce polygône ſont beaucoup plus difficiles à rompre, que ceux du quarré, & encore beaucoup plus que ceux du Triangle; en ce qu'étant plus obtus, ils comprennent ſous une même profondeur beaucoup plus d'hommes.

A l'Egard d'arranger les unitez ſur ces Exago-

nes, il ne s'agit, ayant situé la premiere rangée A B de 18, par éxemple, que d'en mettre une autre parallelle de 19, dont les unitez soient distantes entr'elles & avec celles de A B autant que celles de A B ; ensorte que trois unitez voisines quelconques fassent toujours un triangle équilateral parfait, & continuer ces rangées, jusqu'au nombre de 18 ; ensuite dequoi il les faudra faire diminuer de même chacune d'une unité, jusqu'au nombre de 18 encore, & alors l'Exagone sera achevé.

A l'égard des Théories de ces deux derniers articles, elles me paroissent trop composées pour des Commençans ; c'est pourquoi l'on me permettra de les renvoyer à quelque traité d'Algébre.

CHAPITRE II.

Des opérations d'Aritmétique sur les Fractions & sur les fractions de fractions.

Art. I. Lorsque les parties proposées de l'Entier, ou de la mesure dont on se sert, ne se réduisent pas les unes aux autres ou à une même, comme si l'on a des tiers, des cinquiémes, des huitiémes, &c. on est alors obligé d'opérer immédiatement sur ces differentes parties, c'est-à-dire de les ajouter, soustraire, multiplier, diviser, d'en former les puissances, & d'en tirer les racines quarrées, sans les changer, comme on l'a déja vû dans la premiere Partie à l'égard de l'Addition & de la Soustraction des parties absoluës. D'un autre côté il est quelques-fois plus simple de travailler sur des moitiez, des tiers, des quarts, &c. d'Entiers, que sur les parties usuelles ; ainsi par

exemple, un tiers de livre ou de 20 ſols eſt 6 ſols 8 den. & $\frac{5}{6}$ eſt 3 ſols 4 den. Or on a bien plutoſt multiplié $\frac{1}{3}$ par un $\frac{1}{6}$; (ce qui donne $\frac{1}{18}$ comme on le verra ci-après,) qu'on n'a multiplié 6 ſols 8 d. par 3 ſols 4 den. du moins l'expreſſion eſt-elle ſouvent beaucoup plus ſimple. Enfin ces expreſſions generales de moitiés, de cinquiémes, de ſeptiémes, &c. ſont tres-communes dans toutes les autres parties des Mathématiques, où les parties uſuelles ſont le plus ſouvent negligées; principalement quand il ne s'agit que de comparer les quantitez, ſans en venir à l'uſage. C'eſt pourquoi il eſt utile en ce cas de ſçavoir faire les opérations d'arithmétique ſur les fractions. Or il y a de deux eſpeces de Fractions, ſçavoir celles dont le Dénominateur eſt un nombre quelconque different de l'unité avec des zéros, comme 7, 15, &c. & les autres qui ont l'unité jointe avec des zéros pour leur dénominateur; (comme $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{9}{1000}$;) les premieres s'appellent ſimplement fractions; & les derniers Fractions Décimales, comme on l'a déja dit à la fin du chapitre 5e de la premiere Partie ſur la Diviſion. Nous allons traiter maintenant des fractions communes, & nous parlerons dans le chapitre ſuivant des Décimales. Or outre les cinq opérations communes d'arithmétique dont on vient de parler, il y en a encore cinq autres qui ne regardent que les Fractions, comme de réduire une fraction à ſa plus ſimple expreſſion; de réduire les fractions en leurs entiers, quand cela ſe peut; de réduire au contraire les Entiers en fraction; de donner à pluſieurs fractions un même dénominateur le plus ſimple; & enfin de réduire les fractions de fractions en une ſeule & ſimple fraction: ce qui ſe fait ſans changer en aucune façon la valeur de ces fractions; mais en changeant ſeulement leurs expreſſions.

On a déja enſeigné dans la premiere Partie de quelle maniere on rabaiſſe les Expoſans d'une fration, comme de $\frac{6}{12}$, par éxemple, ſçavoir en prenant une ſemblable partie de chacun : ce qui ſe fait en commençant d'abord par prendre la moitié de l'un & de l'autre, s'il ſe peut : ce qui réduit $\frac{6}{12}$ à $\frac{3}{6}$; enſuite prenant encore les moitiez de ces moitiez, s'il eſt poſſible, juſqu'à ce qu'on ne puiſſe plus prendre de moitié. Après quoi il faut prendre $\frac{1}{3}$ de chacun, s'il ſe peut ; ce qui réduit encore $\frac{3}{6}$ à $\frac{1}{2}$, & continuer encore de prendre les tiers de ces tiers tant qu'il ſe peut ; après cela il faut tenter de prendre $\frac{1}{5}$ de chacun ; & le cinquiéme du cinquiéme, tant qu'il ſe pourra : puis enſuite le ſeptiéme de chacun, & encore le 7e du 7e, tant qu'il ſera poſſible ; enſuite le onziéme, puis le 13e, &c. Mais la premiere tentative eſt de voir, ſi un des Expoſans ne peut point être éxactement diviſé par l'autre ; ainſi 12 étant diviſé par 6, le quotient éxact eſt 2, que l'on prend au lieu de 12, mettant l'unité au deſſus, ainſi $\frac{1}{2}$; ſi au contraire on avoit $\frac{12}{6}$; la diviſion étant faite comme ci-deſſus, on mettroit le quotient 2 ſur la barre & l'unité deſſous, ainſi $\frac{2}{1}$ ou ſimplement 2, puiſqu'alors l'unité eſt à l'égard de 2, ce que 6 eſt au reſpect de 12, & ces deux opérations reviennent à la même ; car c'eſt la même choſe que ſi l'on diviſoit d'abord les deux expoſans 6 & 12 chacun par 6 : ce qui donneroit toujours 1 & 2.

Lorſque les Expoſans d'une fraction n'ont aucun diviſeur commun, on la nomme alors Fraction Primitive ou Premiere, & ſes Expoſans nombres Premiers entr'eux, comme l'on nomme nombres 1^{rs} abſolument ceux qui n'ont aucun diviſeur que l'unité, comme les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, &c. Ces nombres Premiers abſolument ſe trou-

vent tous autour de 6 & de ſes multiples 12, 18, 24, 30, 36, &c. excepté les deux premiers 2 & 3.

II. Toutes les fois que le Numérateur d'une Fraction, comme $\frac{20}{8}$ excede ſon dénominateur, on peut de cette Fraction faire un ou pluſieurs Entiers, & pour cela il ne faut, comme il eſt évident, que diviſer le Numérateur 20 par le Dénominateur 8, le quotient donnera deux entiers & $\frac{4}{8}$, qu'on rabaiſſera à $\frac{1}{2}$ par l'article précédent : ainſi cette fraction $\frac{20}{8}$ eſt la même que $2\frac{1}{2}$. On trouvera par cette régle que la fraction $\frac{12}{3}$ n'eſt autre choſe que 4 entiers ; que $\frac{15}{3}$ n'eſt autre choſe que 5, & ainſi des autres. On a vû déja dans la premiere Partie des exemples de ces réductions ; ſçavoir lorſqu'on a réduit les deniers en ſols, les ſols en livres, les grains en drachmes, les drachmes en onces, &c.

On a vû auſſi des exemples des réductions d'entiers en Fraction ; ſçavoir lorſqu'on a réduit les livres en ſols, ou vingtiémes de livres, en les multipliant par 20, les ſols en deniers ou douziémes de ſols, en les multipliant par 12 ; & de même des autres eſpeces ; ainſi il ſeroit inutile de s'y arrêter davantage.

III. Pour réduire pluſieurs fractions, comme $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, à une même, & plus ſimple dénominateur, on multiplie le numérateur de la premiere, par le produit continuel des dénominateurs 3 & 4 des deux autres ; c'eſt-à-dire par 12 : ce qui donne 12 pour le numérateur de la 1re fraction changée. Pour avoir le numérateur 16 de la 2e fraction changée, on prend auſſi le produit des dénominateurs 2 & 4 des deux autres ; ſçavoir 8, que l'on multiplie par ſon numérateur 2 ; ce qui donne 16 : & pour avoir le numérateur 18 de la 3e fraction changée, l'on multiplie entr'eux les dénominateurs 2 & 3 des deux autres, & le produit par ſon numérateur 3 ;

ainſi les numérateurs des trois nouvelles fractions ſont 12, 16, & 18; & leur dénominateur commun eſt le produit continuel 24 des 3 dénominateurs propoſez 2, 3 & 4. Ainſi ces trois fractions ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$) ſe changent en celles-cy ($\frac{12}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{18}{24}$,) qui ſe rabaiſſent enfin à ($\frac{6}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$,) en prenant la moitié de chacun des expoſans: mais il vaut mieux réduire chaque dénominateur propoſé dans ſes nombres premiers ou compoſans. Comme ſi l'on propoſe les trois fractions ($\frac{5}{12}$, $\frac{7}{45}$, $\frac{11}{21}$) à réduire au même plus ſimple dénominateur; je change les dénominateurs 12, 45, 21 en cette forme (2 ✕ 2 ✕ 3) (3 ✕ 3 ✕ 5) & (3 ✕ 7, & j'ajoute à chacun ce qui lui manque pour les rendre tous égaux ainſi (2 ✕ 2 ✕ 3. 3 ✕ 5 ✕ 7) (3 ✕ 3 ✕ 5. 2 ✕ 2 ✕ 7) (3 ✕ 7. 2 ✕ 2 ✕ 3 ✕ 5 :) ce qui donne le Dénominateur commun deſiré 1260 le plus ſimple qu'il ſoit poſſible. Il ne reſte plus que de multiplier chaque numérateur 5, 7, 11 par le produit qu'on a ajoûté à ſon dénominateur; ſçavoir 5 par 105; ce qui donne le numérateur 525; 7 par 28: ce qui donne le numérateur 196; & enfin 11 par 60; ce qui produit 660; après quoi les trois fractions $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{45}$, & $\frac{11}{21}$ ſont tout d'un coup réduites à leur moindre dénomination pareille, ainſi ($\frac{525}{1260}$, $\frac{196}{1260}$, $\frac{660}{1260}$,).

A l'égard de réduire un nombre comme (45,) par exemple à ſes nombres premiers, cela ſe fait en le diviſant d'abord continuellement par le premier nombre 1r, 2, tant qu'il ſe peut; enſuite le dernier quotient par le 2d nombre 1r, 3, tant qu'il ſe peut: ce qui réduit 45 à 15, & de 15 à 5; enſuite ce dernier quotient 5 par le troiſiéme nombre 1r, 5, tant qu'il ſe peut: ce qui réduit 5 à 1, juſqu'à ce que le quotient ſoit nombre 1r, à peu près comme on a vû dans le rabaiſſement des fractions de l'art. 1. Après quoi il ne reſte que de raſſembler

tous les diviſeurs qui ont diviſé ſans reſte, qui ſont ici (3, 3, 5) ce qui fait connoître que le nombre propoſé 45 n'eſt autre choſe que le produit continuel des trois nombres 1ers (3 × 3 × 5, & de même pour tous les autres nombres compoſez, comme 12, 21, &c.

IV. Enfin pour réduire une Fraction de fraction comme ($\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$) à une ſimple fraction, après avoir réduit chacune des fractions compoſantes à une fraction primitive, comme dans le premier article, (s'il s'en trouve quelqu'une de compoſée) on multiplie continuellement les numérateurs 1, 2, 3 entr'eux : ce qui donne le numérateur (6) de la fraction ſimple deſirée. On fait auſſi un produit continuel des dénominateurs 2, 3, & 4; ce qui donne ſon dénominateur (24.) Ainſi par cette opération, la fraction de fraction propoſée eſt réduite à la ſimple fraction $\frac{6}{24}$, qui ſe réduit enſuite à ($\frac{1}{4}$) par le 2e article.

Mais pour éviter de rabaiſſer encore la nouvelle fraction ($\frac{6}{24}$) à une plus ſimple ($\frac{1}{4}$,) on efface dans la fraction de fraction réduite à ſes fractions primitives ($\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$) les numerateurs & dénominateurs pareils, s'il s'y en trouve, comme ici les 2 & les 3, ſçavoir toujours autant de part que d'autre ſeulement, ainſi $\frac{1, \not{2}, \not{3}}{\not{2}\ \not{3}\ 4}$ ce qui la réduit à ($\frac{1}{1}$ de $\frac{1}{1}$ de $\frac{1}{4}$, qui devient enfin $\frac{1}{4}$ par la multiplication. Car il eſt évident que c'eſt faire deux opérations contraires & deſtructives l'une de l'autre, que d'élever les expoſans de la fraction deſirée par la multiplication, pour les rabaiſſer enſuite au moyen de la diviſion à des expoſans plus ſimples.

V. Ces préparatifs étant faits, il eſt aiſé de voir qu'on ajoute trois fractions qui ſont en même dénomination, comme par exemple $\frac{6}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, de

même qu'on ajouteroit trois Entiers ; en faisant une somme de leurs numérateurs 6, 8, 9 ; sçavoir 23, à laquelle on donne le dénominateur commun 12 : ce qui rend pour leur somme $\frac{23}{12}$ ou 1 & $\frac{11}{12}$.

De même pour ôter une fraction $\frac{12}{24}$ d'une autre $\frac{16}{24}$, qui a le même dénominateur, il est encore évident qu'il ne faut qu'ôter le numérateur 12 du numérateur 16, & écrire sous le reste le dénominateur commun 24 ; ce qui donnera $\frac{4}{24}$ pour le reste desiré, lequel se réduit enfin à $(\frac{1}{6})$.

Soit pour exemple de ces deux opérations les treize fractions $(\frac{4}{1}, \frac{4}{5}, \frac{4}{9}, \frac{4}{13}, \frac{4}{17}, \frac{4}{21}, \frac{4}{25}, \frac{4}{29}, \frac{4}{33}, \frac{4}{37}, \frac{4}{41}, \frac{4}{45}, \frac{4}{49},)$ dont il faille faire une somme, pour en ôter ensuite la somme des 13 autres fractions $(\frac{4}{3}, \frac{4}{7}, \frac{4}{11}, \frac{4}{15}, \frac{4}{19}, \frac{4}{23}, \frac{4}{27}, \frac{4}{31}, \frac{4}{35}, \frac{4}{39}, \frac{4}{43}, \frac{4}{47}, \frac{4}{51}.)$ Pour cet effet je prens d'abord la premiere $\frac{4}{1}$ ou $\frac{12}{3}$ dans les 13 premieres, dont j'ôte la 1re $\frac{4}{3}$ des 13 dernieres, le reste est $\frac{8}{3}$. Je prens de même la deuxiéme $\frac{4}{5}$ des 1res, ou $\frac{28}{35}$, dont j'ôte la 2e $\frac{4}{7}$, ou $\frac{20}{35}$ des dernieres, le 2d reste est $\frac{8}{35}$, que j'ajoute au 1r reste $\frac{8}{3}$: ce qui donne la premiere somme $(\frac{304}{105})$ qui est en même-temps la difference des deux premieres $(\frac{4}{1}, \frac{4}{5})$ aux deux dernieres $(\frac{4}{3}, \frac{4}{7}.)$ Je prens encore $\frac{4}{9}$, dont j'ôte $\frac{4}{11}$, le reste est $\frac{8}{99}$; que j'ajoute avec la premiere somme $\frac{304}{105}$: ce qui donne la 2e somme $(\frac{30936}{10395})$ qui réduit à $(\frac{10312}{3465},)$ & c'est la difference des trois premieres $\frac{4}{1}, \frac{4}{5}, \frac{4}{9}$ aux trois premieres $\frac{4}{3}, \frac{4}{7}, \frac{4}{11}$: & continuant d'opérer de même je trouve pour la difference des quatre premieres $(\frac{4}{1}, \frac{4}{5}, \frac{4}{9}, \frac{4}{13})$ aux quatre dernieres $\frac{4}{3}, \frac{4}{7}, \frac{4}{11}, \frac{4}{15}$, $(\frac{135904}{45045}:)$ pour la difference des 5 premieres de la 1re part aux cinq premieres de la 2e $(\frac{4425732}{1454953535};)$ pour la difference des six premieres, tant de part que d'autre $(\frac{10234611776}{3346393905};)$ pour les sept premieres de part & d'autre, $(\frac{1341141418072}{501953895775}:)$ pour les huit

premieres de part & d'autre ($\frac{1389502156330}{451261102792}$:) pour les 9 1res de part & d'autre ($\frac{13926277743606}{451261102792}$:) pour les dix premieres de part & d'autre ; $\frac{5161979403140 96}{1669666080333225}$:) pour les onze premieres de part & d'autre ($\frac{9113927016380170 48}{2945621299625756 75}$:) pour les 12 1res, de part & d'autre ($\frac{4355578802231348137 6}{1383502010824105672 5}$:) & enfin pour les treize premieres de part & d'autre ($\frac{3038005446180036930 32}{9684514075765039707 51}$;) & ce dernier raport eſt à peu de choſe près celui du circuit d'un cercle à ſon diametre, comme Mr Leitmits, & depuis luy M. Ozanam & le P. Reinau l'ont démohtré, & lequel raport j'ay publié dans le Mercure de Paris en Aouſt 1713, ou que je démontre que toutes ces fractions ſont Primitives, ou irréductibles, & qu'elles augmentent cependant indéfiniment. D'où je crois avoir conclu le premier que ce raport tant cherché depuis plus de 2000 ans, eſt compris entre deux nombres infinis premiers entr'eux, & par conſequent abſolument inconcevable & inexprimable à l'entendement humain. Et il ne ſerviroit de rien de dire, que ſi l'on ôtoit une unité à un des expoſans infinis de ce raport, ces deux expoſans, pourroient alors ſe rabaiſſer entr'eux, & comprendre un raport ſimple, & que par conſequent le raport de la circonference d'un cercle à ſon diametre (qui dans les principes de ces trois auteurs peut bien manquer d'une unité ſur un nombre infini) n'eſt pas inexprimable, comme on le prétend ici; parce que l'on ſçait d'ailleurs qu'une unité, ou même un nombre fini d'unitez, ajouté à une quantité infinie ne change pas ſa nature; ainſi après cette addition ou ſouſtraction finie à l'un ou à l'autre de ces expoſans infinis du raport de la circonference au diametre, ce raport demeureroit toujours le même; c'eſt-à-dire abſolument inexprimable.

VI. Pour multiplier deux fractions entr'elles, comme $\frac{1}{2}$ par $\frac{2}{3}$, on ſe contente de multiplier entr'eux leurs numérateurs 1 & 2, pour avoir le numérateur 2 du produit deſiré & les dénominateurs 2 & 3 auſſi entr'eux, pour avoir le dénominateur 6 du même produit, qui ſera par conſequent $\frac{2}{6}$, lequel ſe réduit à $\frac{1}{3}$. Mais pour éviter ces réductions d'après coup, & avoir tout d'un coup un produit tout réduit, il faut obſerver ce qu'on a dit dans l'article 4 ci-devant au ſujet des fractions de fractions; ſçavoir d'effacer auparavant les nombres communs entre les numérateurs & dénominateurs de toutes les fractions à multiplier; également de part & d'autre : ce qui donne ſeulement dans cet exemple $\frac{1}{1}$ à multiplier par $\frac{1}{3}$, dont le produit eſt toujours $\frac{1}{3}$ ſimplement, & ainſi d'un plus grand nombre de fractions, comme ſi l'on propoſe de multiplier continuellement entr'elles les 3 fractions ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$;) effaçant les 2 & les 3 de part & d'autre, il reſte ſeulement les trois fractions ($\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{4}$) à multiplier continuellement : ce qui donne pour produit tout réduit ($\frac{1}{4}$.) Où l'on peut remarquer que cette opération eſt préciſément la même, que de réduire ($\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$) à la ſimple fraction $\frac{1}{4}$. Ainſi la multiplication des fractions peut, ſi l'on veut, n'être pas regardée comme une opération particuliere des fractions, mais comme une réduction de fractions de fractions à une ſeule fraction.

Au reſte les multiplications des fractions ſervent au même uſage, que les Régles de proportion conjointes dont on a parlé dans la premiere Partie, en traitant des proportions compoſées, comme on va le voir par un exemple. Soit une certaine monnoye de France qui ne vaille que les $\frac{3}{4}$ d'une monnoye de Hambourg, enſorte qu'il en faille 4 de celle de France pour en faire 3 d'une de Ham-

bourg : ſuppoſons auſſi qu'une des mêmes pieces de Hambourg ſoit la moitié ou $\frac{1}{2}$ d'une autre de Hollande, de ſorte qu'il en faille 2 de Hambourg pour en faire une de Hollande. Enfin ſoit ſuppoſé qu'une des mêmes pieces de Hollande vaille $\frac{6}{5}$ d'une de Londres, ou que 5 de Hollande en vaille 6 de Londres ; on demande quel raport il y a de celles de France à celles de Londres. Pour trouver ce raport, on prend les trois fractions ($\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{6}{5}$) qui marquent les raports de ces trois eſpeces de monnoye, on en fait un produit continuel qui donne la fraction $\frac{18}{40}$, ou ($\frac{9}{20}$,) laquelle marque le raport déſiré. Ainſi le raport de la monnoye propoſée de France à la propoſée de Londres eſt de 9 à 20 ; c'eſt-à-dire qu'il en faut 20 de celle de France pour en faire 9 de celle de Londres.

Si	font	combien	*Réponſe.*
4	3	20	9
2	1	de France ?	de Londres
5	6		
40	18	20	9
20	9		

On trouve la même choſe par une rég. de proportion Conjointe & droite, en diſant ; [Si 4 de France font 3 de Hambourg ; ſi 2 de Hambourg font 1 de Hollande ; & ſi 5 de Hollande font 6 de Londres, combien 20 de France ? Réponſe. 9. Ainſi abſolument parlant on peut ſe paſſer encore en cette occaſion de la multiplication des fractions.

Au reſte ces raports compoſez ſont fort utiles pour faire des payemens d'un pays dans un autre. Car il arrive ſouvent qu'en payant par des entrepôts, comme de France à Hambourg, de Hambourg en Hollande & de Hollande à Londres, on trouve beaucoup mieux ſon compte tous frais rabatus,

qu'en payant immédiatement à Londres où la dette a été contractée, & c'eſt par ces connoiſſances que les Banquiers peuvent legitimement s'enrichir.

VII. Pour diviſer une fraction comme $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$, les ayant miſes d'abord en même dénomination par l'article 3 ainſi ($\frac{9}{12}$ & $\frac{8}{12}$,) il ne reſtera que de diviſer 9 par 8, comme des Entiers, & la fraction ($\frac{9}{8}$) ſera le quotient deſiré ; où l'on voit que le dénominateur commun 12 eſt même inutile. Ainſi il ſuffit de multiplier le numérateur 3 d'une part par le dénominateur 3 de l'autre ; & réciproquement le numérateur 2 par le dénominateur 4 ; ce qui donnera toujours 9 à diviſer à 8, comme ci-deſſus. Mais avant de faire cette multiplication réciproque, il faut rabaiſſer les numérateurs entr'eux, & auſſi les dénominateurs, afin de ne faire aucune opération inutile. Ainſi pour diviſer $\frac{18}{25}$ par $\frac{16}{15}$, je réduis 18 & 16 à 9 & 8, & 25 & 15 à 5 & 3 ; ce qui donne $\frac{9}{5}$ à diviſer à $\frac{8}{3}$; c'eſt-à-dire 27 à diviſer à 40, ou ($\frac{27}{40}$;) & c'eſt le quotient de $\frac{18}{25}$ diviſé à $\frac{16}{15}$, autant réduit qu'il le peut être & tout d'un coup.

VIII. Pour tirer la racine quarrée d'une fraction comme de ($\frac{4}{9}$), on tire la racine quarrée, tant du numérateur que du dénominateur ; ce qui réduit cette fraction à $\frac{2}{3}$. Mais il faut auparavant la réduire à ſa plus ſimple expreſſion. Si un des deux expoſans de la Fraction n'étoit pas un nombre quarré, comme dans $\frac{2}{9}$, par éxemple, il faudroit tirer la racine de 2 en 10es ou centiémes, ou 1000es &c. ſçavoir ($\frac{14}{10}$,) ou ($\frac{141}{100}$,) ou ($\frac{1414}{1000}$, &c.) & tirer auſſi la racine de 9, ou $\frac{9}{1}$, ſçavoir $\frac{3}{1}$ & diviſer enfin une de ces racines de 2 par la fraction $\frac{3}{1}$; ce qui donneroit $\frac{14}{30}$, ou $\frac{7}{15}$, $\frac{141}{300}$, ou $\frac{47}{100}$, & $\frac{1414}{3000}$, pour les racines approchées de plus en plus de la racine de $\frac{2}{9}$. Enfin ſi aucun des expoſans de la fractionn'eſt

un nombre quarré, comme en $\frac{2}{3}$, on pourra multiplier ſon numérateur 2 par ſon dénominateur 3, pour avoir le numérateur 6 d'une nouvelle fraction, dont le dénominateur eſt le quarré de 3, ainſi $\frac{6}{9}$; ce qui retombe dans le cas précédent, & cela ſans changer la valeur de la fraction. C'eſt ce qu'on a déja vû dans le chapitre précédent de l'extraction des racines de deux longueurs.

IX. A l'égard des opérations ſur les racines des fractions de fractions, il eſt évident qu'elles ſont les mêmes, que ſur de ſimples racines, après qu'on les a réduites en fractions ſimples; ainſi il ſeroit inutile de s'y arrêter davantage. D'où l'on voit que toutes les opérations de ce chapitre ſur les fractions ſe réduiſent à deux préparatifs; ſçavoir de donner à pluſieurs fractions un même plus ſimple dénominateur; & de réduire les fractions de fractions à de ſimples fractions.

X. Soit enfin ſuppoſé pour exemple d'une régle de ſocieté en fraction, qu'on a cette queſtion a réſoudre, appellée Teſtamentaire. Un pere ayant fait en mourant le partage de ſon bien entre ſes enfans à ces conditions; ſçavoir que les repriſes de ſa femme (qu'on ſuppoſe groſſe) étant déduites, ſi elle accouche d'un fils, il veut qu'il ait les $\frac{3}{4}$ du reſte de ſes biens, & que deux filles qu'il a déja partagent également le quart reſtant; & que ſi ſa femme enfante une fille, l'aînée des trois aura les $\frac{3}{4}$ de tout le reſte de ſes biens, & les deux autres partageront encore également entr'elles le reſte du bien: il arrive après la mort du pere que la mere accouche de deux fils & d'une fille en même-temps, tous trois vivans; on demande donc de quelle maniere on doit partager les deux garçons & les trois filles. Or il paroît par ce teſtament, que l'intention du Teſtateur eſt, que ſes fils ayent

chacun 3, tandis que chacune de ſes filles n'auront que $\frac{1}{2}$. Faiſant donc une régle ſocieté, dans laquelle il y ait pour les parties de la miſe deux fois 5 pour les deux fils; & trois fois $\frac{1}{2}$ pour les trois filles; & l'unité, ou le reſtant du bien à partager pour le gain total, on trouve après la réſolution, $\frac{2}{5}$ du bien pour chacun des deux garçons; & ſeulement $\frac{1}{15}$ pour chacune des filles : ce qui fait en tout $\frac{15}{15}$ ou 1 entier, c'eſt-à-dire tout le bien reſtant à partager.

$7\frac{1}{2}$	3 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{5}$ } *Parts des* $\frac{2}{5}$ } *Garçons.* $\frac{1}{15}$ } *Parts des* $\frac{1}{15}$ } *Filles.* $\frac{1}{15}$		
Si 15	donnent 2	commbien	3 3 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{15}$	

Théorie des operations ſur les Fractions.

XI. Pour l'intelligence du premier article, il faut ſe ſouvenir qu'on entend par une fraction, comme par éxemple $\frac{6}{12}$, une certaine partie d'un Entier. Son dénominateur 12 ſignifie que cet entier a été diviſé en douze parties égales, & ſon numérateur fait connoître qu'on a pris ſix de ces mêmes parties. Or ſi l'on partageoit l'Entier en ſix parties égales ſeulement, & qu'on ne prît en même-temps que trois de ces parties, il eſt évident qu'on auroit préciſément la même partie de cet Entier dans la fraction $\frac{3}{6}$, que dans la fraction $\frac{6}{12}$, puiſque 3 eſt la même partie de 6, que 6 eſt de 12.

Car

Car lorſqu'on augmente, ou que l'on diminuë proportionnellement le numérateur & le dénominateur d'une fraction, ce numérateur conſerve toujours un même raport avec ce dénominateur. Ainſi la partie que l'on prend de l'Entier, (laquelle eſt exprimée par le numérateur) a toujours le même raport à ſon tout, qui eſt marqué par le dénominateur.

2. A l'égard de l'article 2, il faut conſiderer, que comme le Dénominateur d'une fraction marque toujours l'Entier dont elle eſt partie; quand le numérateur eſt égal au dénominateur, comme par par éxemple dans $\frac{8}{8}$, la fraction vaut alors l'Entier même; puiſqu'alors le numérateur fait connoître que l'on prend toutes les parties du tout. C'eſt pourquoi ſi le numérateur vaut pluſieurs fois le dénominateur, comme dans $\frac{24}{8}$, dans laquelle le numérateur contient le dénominateur 3 fois; alors la fraction vaut autant de fois l'Entier; c'eſt-à-dire ici trois Entiers. Ainſi il eſt évident qu'il ne faut alors que diviſer le numérateur 24 par le dénominateur 8, pour avoir la valeur de la fraction propoſée en entiers & parties d'entiers, ſuppoſé qu'il reſte quelque choſe de la diviſion.

3. Quand au troiſiéme article il n'eſt pas difficile de voir la raiſon de ſa pratique. Car le numérateur de chacune des fractions réduites à même dénomination, comme de la premiere $\frac{12}{24}$ étant fait du numérateur 1 de la premiere $\frac{1}{2}$ multiplié par le produit 12 des dénominateurs 3 & 4 des deux autres; & ſon dénominateur 24 étant fait du dénominateur 2 de cette premiere, multiplié par le même produit 12, il eſt évident qu'on ne fait autre choſe par là, que de prendre douze fois tant le numérateur 1, que le dénominateur 2 de la fraction propſée $\frac{1}{2}$. Ainſi le raport du numéra-

teur 1, au dénominateur 2, n'étant point changé par cette opération, la valeur de la fraction $\frac{1}{2}$, changée en $\frac{12}{24}$ demeure toujours la même. C'eſt préciſément la même raiſon pour les deux autres fractions propoſées $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$.

4. Pour entendre le 4e article, il faut conſiderer, qu'une fraction de fraction comme ($\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$) eſt une partie qui n'eſt comparée à ſon Entier, que par le moyen d'une autre, ou même de pluſieurs autres fractions interpoſées. Ainſi dans cet éxemple $\frac{1}{2}$ ſignifie une fraction, ou partie de la fraction $\frac{2}{3}$, laquelle fraction $\frac{2}{3}$ lui tient lieu d'entier de même que la fraction $\frac{3}{4}$ tient lieu d'entier à la fraction $\frac{2}{3}$. C'eſt-à-dire que l'on ſuppoſe l'Entier diviſé en quatre parties égales, dont on en a pris trois pour former la fraction $\frac{3}{4}$; qu'enſuite cette partie ou fraction $\frac{3}{4}$ étant conſiderée elle-même comme un tout, eſt diviſée concore en trois parties égales, dont on en prend deux pour former la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$; & qu'enfin cette fraction de fraction étant conçûë encore comme un tout, eſt diviſée derechef en deux parties égales, dont on prend ſeulement une partie, qu'on exprime par $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$. Ainſi le raport de cette derniere partie à l'Entier renferme les raports de $\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{3}$, de $\frac{2}{3}$ à $\frac{3}{4}$, & de $\frac{3}{4}$ à l'Entier; c'eſt-à-dire de 1 à 2, de 2 à 3, & de 3 à 4. Or multipliant continuellement les numérateurs 1, 2, 3, & les dénominateurs 2, 3, 4 entr'eux, les 2 produits 6 & 24 renferment auſſi entr'eux les trois raports de 1 à 2, de 2 à 3, & de 3 à 4; c'eſt-à-dire des trois premiers aux trois derniers, comme on l'a vû dans la Théorie des régles de proportion compoſée. C'eſt pourquoi la fraction de fraction propoſée eſt bien exprimée par le raport des deux produits 6 & 24, ſçavoir $\frac{6}{24}$, ou par ſa réduite ($\frac{1}{4}$).

5. Le 5e article n'a rien de difficile en ſoy.

A l'égard du 6e on peut demander, d'où vient que pour multiplier deux fractions en elles, comme $\frac{1}{2}$ par $\frac{2}{3}$; ayant multiplié les numérateurs entr'eux 1 & 2, pour avoir le numérateur 2 d'une nouvelle fraction, on multiplie encore les dénominateurs 2 & 3 auſſi entr'eux, pour avoir le dénominateur 6, de cette nouvelle fraction, que l'on preud pour le produit deſiré des deux fractions propoſées. Or la raiſon de cette opération a déja été touchée cy-devant dans la multiplitation des entiers & parties; lorſqu'on a dit, par exemple, que les deniers multipliés par les deniers produiſent des deniers de deniers; les dracmes par les dracmes, des dracmes de dracmes. A quoy nous ajouterons que ſi au lieu des fractions propoſées $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$, on avoit propoſé les numérateurs 1 & 2 à multiplier entr'eux, le produit ſeroit alors deux entiers. Mais ſi au lieu de (1) on a ſeulement $\frac{1}{2}$ à multiplier par 2, ce produit (2) devra être diminué de moitié, ce qui ſe fait en le diviſant par le dénominateur 2 de $\frac{1}{2}$, ainſi $\frac{2}{2}$. Enfin ſi au lieu de $\frac{1}{2}$ à multiplier par 2, on a $\frac{1}{2}$ à multiplier ſeulement par $\frac{2}{3}$, ce dernier produit $\frac{2}{2}$ devra encore être reduit au tiers, puiſque $\frac{2}{3}$ ne ſont que la troiſiéme partie de 2. Or on réduit une fraction quelconque comme $\frac{2}{2}$ au tiers de ſa valeur, en multipliant ſon dénominateur 2 par 3; parce qu'à meſure que ce dénominateur (qui eſt le diviſeur de l'entier dont la fraction eſt partie) augmente, (le numerateur 2. demeurant toûjours le même), la part que l'on prend de cet entier eſt plus petite à proportion. Ainſi dans nôtre exemple, au lieu de prendre $\frac{2}{2}$, on ne prend que $\frac{2}{6}$ qui eſt le tiers de $\frac{2}{2}$; & ainſi de toutes les autres ſubdiviſions de l'Entier. Ce qui fait voir la

raiſon pour laquelle il faut multiplier les deux numérateurs des deux fractions propoſées entre eux, & auſſi les deux dénominateurs, pour avoir ceux de la nouvelle fraction, qui eſt le produit deſiré. Il ſuit delà que ſi l'on a un plus grand nombre de fractions à multiplier continuellement entr'elles, comme ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c.) il faut prendre le produit continuel 6 de tous leurs numérateurs 1, 2, 3, & auſſi le produit continuel 24 de tous leurs dénominateurs 2, 3, 4, pour avoir le numérateur & le dénominateur de la nouvelle fraction $\frac{6}{24}$ ou $\frac{1}{4}$, qui eſt le produit des 3 propoſées: le tout comme dans la réduction des fractionsde fractions à une ſeule fraction, qui n'eſt qu'une compoſition de raports, de même que la multiplication des fractions.

Quant à l'abbregé de la diviſion, il ne faut que conſiderer que par cette diviſion, on ne cherche, que le raport de $\frac{18}{25}$ à $\frac{16}{15}$. Or ce raport ſubſiſte toujours le même, après qu'on a également diviſé ces deux fractions ainſi ($\frac{9}{25}$, $\frac{8}{15}$; & lorſqu'on les a auſſi également multipliées ainſi ($\frac{45}{25}$, $\frac{40}{15}$,) ou tout d'un coup ($\frac{9}{5}$, $\frac{8}{3}$.)

7. Il ne reſte donc plus que de ſçavoir, d'où vient que quand on veut avoir la racine quarrée d'une fraction quarrée $\frac{16}{64}$, (ou du moins que l'on regarde comme telle) on tire la racine quarrée, tant du numérateur, que du dénominateur de la propoſée: ce qui donne ſa racine $\frac{4}{8}$ ou $\frac{1}{2}$. Or cela vient de ce que pour former le quarré $\frac{16}{64}$ d'une fraction quelconque $\frac{4}{8}$, il faut la multiplier par elle-même; c'eſt-à-dire ſon numérateur par lui-même, & ſon dénominateur auſſi par lui-même; ou prendre le quarré, tant du numérateur, que du dénominateur. Donc au contraire, pour avoir la racine quarrée de la fraction $\frac{16}{64}$, il faut tirer la racine du tant numérateur, que du dénominateur.

CHAPITRE III.

De Parties Décimales.

ART. I. QUoique les parties décimales ne ſoient pas de l'uſage commun en Europe, j'ai trouvé cependant à propos, d'en donner les régles, parce qu'il y a de très-grands Empires, comme la Chine, le Japon, &c. où l'on n'en connoît preſque pas d'autres. Dans la Chine, par éxemple, les pieds, les onces, les aunes, &c. ſont ſubdiviſez de 10 en 10; c'eſt-à-dire, l'entier en 10 parties égales, dont chacune eſt encore diviſée en 10, & ainſi tant qu'on en a beſoin: outre qu'il eſt aiſé de rendre ces décimales utiles pour toutes ſortes de peuples, en les ajoutant ſur les meſures uſitées étenduës en longueur, comme ſur les toiſes, les perches, les aunes, &c. à côté des parties uſuelles; ou formant des tables, pour les autres eſpeces de meſures, comme les livres, les muids, &c. dans leſquelles on trouve à côté des parties uſuelles leurs valeurs en décimales. Car au moyen de ces ſecours, ſi l'on ſe ſert de ma méthode de multiplier les entiers & parties, en réduiſant les produits ſeulement en parties courantes ou lineaires, on on n'aura pas beſoin d'autre Réducteur, que d'une chaîne, ou toiſe, ou perche qui contienne, outre les meſures vulgaires, des parties décimales, comme par éxemple des milliémes de toiſes, qui ſont moindres que des lignes, leſquelles ne ſont que la 854e partie de la toiſe: le tout ſuivant la grandeur de la meſure, dont on ſe ſervira. Parce que dans cette métode

une toiſe lineaire ou ſuperficielle, ou cubique, contenant toujours 6 pieds courans, le pied courant toujours 12 pouces courans; & le pouce courant toujours 12 lignes courantes, la ligne toujours 6 points; il eſt évident que la meſure, qui contiendra les décimales, auſſi-bien que les parties uſitées, ſervira elle-même de Réducteur, tant pour les parties lineaires, que les ſuperficielles, & les cubiques. Après quoi l'on ne doit plus faire aucune difficulté de ſe ſervir de cette ſorte de calcul, ayant des meſures diviſees de cette manieres, & des tables pour les autres eſpeces de meſures, qui ne peuvent pas aiſément être diviſées. On peut ajouter de même des parties décimales aux aunes des marchands : ce qui ſera fort commode pour faire leurs régles de proportion, par la facilité de réduire tout d'un coup les termes de leurs régles de proportion dans les moindres décimales, afin d'operer ſur ces décimales, & de rappeller enſuite les quotients exprimez en décimales aux parties vulgaires de l'aune; & de même de toutes les meſures qui conſiſtent dans l'étenduë.

De la réduction des Entiers en décimales.

2. Si l'on veut réduire 253 entiers, par éxemple, en premieres décimales qui ſont des 10es de l'Entier, appellées Primes, il ſuffira d'écrire un zéro après la ſomme 253, ainſi (2530^{I}) & de mettre une unité au deſſus du dernier chiffre pour ſignifier que ce ſont des primes, ou 1res décimales: ce qui s'entend aſſez par les remarques qu'on a faites dans la premiere Partie ſur la multiplication par 10; car cette expreſſion eſt la même que ($\frac{2530}{10}$,) laquelle ſe réduit à 253 ſimplement, ſelon le ra-

baiſſement des fractions du chapitre précedent. De même pour réduire encore 253 en 10es de primes qui ſont des 100es de l'Entier, appellées ſecondes, j'écris 2 zéros après 253, ainſi 25300^{2} avec le chiffre 2 ſur le dernier zéro, pour faire voir que ce ſont des ſecondes. Pour mettre encore 253 entierces, qui ſont des 10es de ſecondes, ou des 1000es de l'entier, j'écris 3 zéros après, & en même-temps le nombre 3 ſur le dernier zéro, ainſi 253000^{3}; & cette expreſſion eſt la même que $\frac{253000}{1000}$, qui ſe réduit toujours à 253, ſelon les mêmes réductions.

De la réduction des Décimales en Entiers & décimales.

II. Si l'on a, par éxemple, 324^{1} à réduire en Entiers & primes, il ne faut que mettre un point devant le dernier chiffre 4, ainſi; (32.4^{1};) ce qui fait 32 Entiers & 4 primes, conformément aux remarques ſur la Diviſion des Entiers par 10, 1re Partie. De même pour réduire encore 324^{2} en entiers & ſecondes, mettez un point devant les deux derniers chiffres, ainſi (3.24^{2};) ce qui donnera 3 entiers & 24 ſecondes, ſelon les remarques ſur la diviſion par 100. Pour mettre 24^{2} en Primes & ſecondes, j'écris un point devant le dernier chiffre, ainſi ($2^{1}.4^{4}$) avec l'unité ſur le 2, & un 2 ſur le 4; ce qui fait 2 Primes & 4 ſecondes; ainſi 324^{2} réduites en Entiers & parties font ($3.2^{1}.4^{2}$;) c'eſt-à-dire 3 Entiers, 2 primes & 4 ſecondes. De même $56,7894$ réduites en Entiers & parties, font ($5.6^{1}.7^{2}.8^{3}.9^{4}.$) Car cette derniere opération n'eſt autre choſe que de réduire d'abord 56789^{4} en tierces: ce qui donne, en diviſant par 10, (5678^{3})

& 9 ; & réduisant encore 5678^3 en secondes, en divisant par 10, on a ($567^2 . 8^3$.) Divisant de même 567^2 par 10, pour en faire des Primes, on trouve ($56^1 . 7^2$;) enfin, divisant 56^1 par 10 pour en faire des Entiers, il vient ($5 . 6^1$.) Ainsi toute la somme de 56789^4 se réduit à ($5 . 6^1 7^2 8^3 9^4$.) On peut dire aussi que cette somme 56789^4 n'est autre chose que $\frac{50000}{10000}$, plus $\frac{6000}{10000}$, plus $\frac{700}{10000}$, plus $\frac{80}{10000}$, plus $\frac{9}{10000}$, qui se réduit à 5, plus $\frac{6}{10}$, plus $\frac{7}{100}$, plus $\frac{8}{1000}$, plus $\frac{9}{10000}$, qui est la même chose que ($5 . 6^1 . 7^2 . 8^3 . 9^4$.)

Voy. errata

De la réduction des Entiers & décimales dans les moindres décimales.

III. Pour réduire 7^1 en tierces, j'écris 2 zéros à leur suite, ainsi (700^3.) Pour mettre 2^2 en tierces j'écris un zéro à la suite ainsi (20^3.) Pour changer ($7^1 . 2^2$.) en Tierces, j'écris (720^3.) Pour convertir ($7^1 . 2^2 . 3^3$) en Tierces, j'écris seulement (723^3.) Pour évaluer ($350 . 3^1 . 4^2 . 5^3$) en Tierces, j'écris seulement (350345^3.) Pour les résoudre en Quartes, j'écris 350345^4; & ainsi des autres : le tout suivant la multiplication par 10. Car ($350 . 3^1 . 4^2 . 5^3$,) sont la même chose que ($350 . \frac{3}{10} . \frac{4}{100} . \frac{5}{1000}$,) ou que $\frac{350000}{1000}$, plus $\frac{300}{1000}$, plus $\frac{40}{1000}$, plus $\frac{5}{1000}$, qui étant ajoutées en une somme font $\frac{350345}{1000}$, ou (350345^3); & de même de toutes les autres réductions. Si l'on avoit ($250 . 0^1 . 7^2 . 3^3$) à mettre en Tierces, il faudroit écrire simplement (250073^3.)

Il faut remarquer ici que ces deux articles sont absolument inutiles pour les peuples, dont les mesures naturelles ne sont pas divisées en décimales. Car ceux-ci ne doivent connoître que les moindres

décimales, comme les Tierces, ou milliémes d'Entiers, les quartes ou 10000émes, &c. ſuivant le prix des matieres que l'on meſure, afin d'opérer plus facilement par les décimales, & de rapporter les décimales trouvées par l'opération aux parties uſuelles, au moyen des Reducteurs ou des Tables conſtruites pour cet uſage, comme on l'a dit au commencement de ce chapitre. Et s'il arrivoit un jour que nous fuſſions auſſi uniformes dans nos coutumes, que les ſages Chinois & les autres peuples qui ne reconnoiſſent preſque que les parties décimales, nous n'aurions plus beſoin alors de Réducteurs, ni de Décimales, ni d'aucunes régles particulieres pour opérer ſur les Entiers & parties: ce qui ajouteroit une grande commodité à toutes nos régles d'arithmétique, & un nouveau luſtre à la perfection de nos arts.

De l'Addition des Parties Décimales.

1er EXEMPLE.

5. $4^1.3^2.8^3.$	
$6^1.0^2.3^3.$	
6. $0^1.4^2.1^3.$	

IV. Pour ajouter $5.4^1.3^2.8^3$, avec $6^1.0^2.3^3$ en une ſomme, j'ajoute 8^3 à 3^3: ce qui fait 11^3. ou $1^2.1^3$. j'écris donc ſeulement 1^3 au deſſous d'une barre, comme dans l'addition ordinaire, retenant 1^2, que j'ajoute aux trois précedentes; ce qui fait 4^2, que j'écris deſſous. J'ajoute de même 4^1 avec 6^1, la ſomme eſt 10^1. J'écris donc o ſous les primes, & je retiens une dixaine, que j'ajoute aux cinq entiers qui précedent, la ſomme eſt 6 Entiers. Ainſi la ſomme totale eſt ($6.0^1.4^2.1^3.$) le tout comme dans l'addition des Entiers.

2d EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} 2\ 8\ 3\ 0^1.2^2.0^3.7^4.0^5. \\ 2\ 5\ 0^1.9^2.7^3.0^4.9^5. \\ \hline 3\ 0\ 8\ 1^1.1^2.7^3.7^4.9^5. \end{array}$$

On fera de même pour ajouter $283.0^1.2^2.0^3.7^4.0^5$, avec $25,0^1.9^2.7^4.0^4.9^5$; ce qui donnera pour la somme $308.1^1.1^2.7^3 7^4.9^5$, sans qu'il y ait plus de difficulté. Car il ne faut point d'autres régles pour l'addition des entiers avec des Décimales, que celles que nous avons données pour les Entiers seuls dans la premiere Partie. Ainsi l'on ajoute $5.4^1.3^2.8^3$. avec $6^1.0^2.3^3$. comme on ajouteroit 5438^3 avec 603^3, puisque c'est la même valeur; ou même comme on ajouteroit 5438 entiers avec 603 entiers, sans aucune difference, comme on l'a vû encore dans l'Addition des Fractions du chapitre précédent. On ajoute de même $253.0^1.2^2.0^3.7^4.0^5$ avec $25.0^1.9^2.7^3.0^4.9^5$, comme on feroit 25302070^5 avec 2509709^5, ou comme de simples entiers; & ainsi de tous les autres éxemples.

De la Soustraction des Entiers avec des parties décimales.

1r EXEMPLE.

Somme prop.	$5\ 3.3^1.2^2.5^3$
Somme à ôter,	$2\ 5.2^1.7^2.3^3$
Reste	$2\ 8.0^1.5^2.2^3$

Soit $25.2^1.7^2.3^3$, qu'il faille retrancher de $53.3^1 2^2.5^3$, les ayant écrites, comme il est enseigné dans la soustraction des entiers & parties, je dis de 5^3 j'ôte 3^3, il reste 2^3, que j'écris dessous; ensuite de 12^2, j'ôte 7^2, il

reſte 5^2, que je mets encore deſſous ; puis de 3^1, j'ôte 3^1 (à cauſe de l'emprunt,) il ne reſte rien ; j'écris donc o deſſous. Enfin de 53 j'ôte 25 à l'ordinaire, il reſte 28, & le reſte total eſt $28.0^1.5^2.2^3$.

2d EXEMPLE.

Somme prop. 5 $3.0^1.0^2.5^3$
Somme à ôter, 2 5 $2^1.7^2.6^3$

Reſte . . . . 2 7. $7^1.2^2.9^3$

Soit encore $25.2^1.7^2.6^3$ à ôter de $53.0^1.0^2.5^3$, je fais cette ſouſtraction, comme j'ôterois 25276^3 de 53005^3, ou ſimplement 25276 de 53005 ; ce que l'on doit remarquer, & le reſte eſt $27.7^1.2^2.9^3$.

3e EXEMPLE.

Somme prop. 9 $6.0^1.0^2.0^3$
Somme à ôter, 3 $2.5^1.3^2.7^3$

Reſte . . . . 6 $3.4^1.6^2.3^3$

Si l'on avoit encore $32.5^1.3^2.7^3$ à ôter de 96 entiers, je reduirois 96 en tierces, par le premier article, ainſi 96000^3 dont je ferois des Primes, des ſecondes & des tierces, ainſi $96.0^1.0^2.0^3$, & dont j'ôterois enſuite $32.5^1.3^2.7^3$ comme pour les Entiers, le reſte ſeroit $63.4^1.6^2.3^3$.

4e EXEMPLE.

Somme prop. 7 $0^1.0^2.0^3$
Somme à ôter, $3^1.2^2.5^3$

Reſte . . . . $6.6^1.7^2.5^3$

Faites de même pour ôter $3^1.2^2.5^3$, de 7, en écrivant $7.0^1.0^2.0^3$, au lieu de 7, qui eſt toujours la même valeur, & ôtant 3253^3 de 7000^3 comme ſi c'étoient des entiers, on trouvera $6.6^1.7^2.5^3$ pour le reſte deſiré.

Quoique ces opérations ſoient auſſi commodes, que celles qu'on fait ſur les Entiers, pour les peuples qui ſe ſervent de Décimales dans l'uſage commun, il ne s'enſuit pas pour cela, que les peuples qui employent d'autres parties, que les décimales, doivent auſſi faire leurs additions & ſouſtractions d'entiers & parties par les décimales; parce que ces deux opérations ſont ſi aiſées à faire par les parties d'uſage, pour peu qu'on ait d'habitude dans le calcul; que l'on employeroit beaucoup plus de temps à operer par les décimales; à cauſe des changemens de parties uſuelles en décimales, & du retour des décimales aux parties uſuelles qu'on ſeroit obligé de faire.

De la multiplication des Entiers, avec des parties décimales.

V. La multiplication des parties décimales ſe fait encore comme celles des Entiers, & même ſans aucune autre réduction, que de les réduire d'abord dans leurs moindres parties données. Il faut ſeulement ſe ſouvenir que l'Expoſant des Entiers eſt toujours zéro, puiſque les Entiers n'ont point d'autre dénominateur que l'unité; & que l'Expoſant d'un produit eſt toujours égal à la ſomme des expſans des 2 multiplians réduits chacun dans leurs moindres parties données, conformément à la multiplication des fractions, dont le dénominateur eſt 10, ou 100, ou 1000, &c. où l'on a dit, que pour multiplier deux fractions entr'elles, il ne faut pas ſeulement multiplier leurs numérateurs entr'eux, mais encore leurs dénominateurs. Or dans les décimales le produit des dénominateurs doit avoir la ſomme de leurs zéros, comme il eſt évident.

1r EXEMPLE.

Somme à multip.	3	2.	3	2	4^3	
multiplicateur	2	8	5	7^2		
		2	2	6	2	6 8
	1	6	1	6	2	0
2	5	8	5	9	2	
6	4	6	4	8		
Produit 9	2	3	4	9	6	6 8^5

Soit la ſomme $32.3^1.2^2.4^3$ à multiplier par $285^1.7^2$, ayant réduit l'une & l'autre dans ſes moindres parties ainſi 32324^3, 2857^2, (ce qui n'apporte aucun changement eſſentiel à leur valeur,) je multiplie ces deux ſommes comme ſi c'étoient des Entiers, & je trouve pour produit 92349668^5, ſur le dernier chiffre duquel j'écris la ſomme 5 des expoſans 2 & 3 des deux multiplians réduits; & réduiſant ce produit en Entiers & parties, comme dans le deuxiéme article, il ſe change ſous cette forme ($923.4^1.9^2.6^3.6^4.8^5$.)

2d EXEMPLE.

$2.3^1.4^2$.					
2	5	0			
1	1	7	0	0	
4	6	8			
5	8	5	0	0	2

Soit encore $2.3^1.4^2$ à multiplier par 250 entiers, ou réciproquement; ayant réduit $2.3^1.4^2$ à (234^2,) je les multiplie par 250, comme des entiers, & je trouve pour produit 58500^2 ſur le dernier chiffre duquel j'écris la ſomme 2 des expoſans de 234^2 & 250^0. Enfin je réduis ce produit 58500^2 en Entiers & parties, par le ſecond Probléme; ce qui donne $585.0^1.0^2$; c'eſt-à-dire ſimplement 585 Entiers.

Pour les peuples dont les parties uſuelles ſont autres que les décimales.

3e EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} 3\ 5\ 4\ 7\ 8\ 3^{3} \\ 2\ 2\ 9\ 4\ 6^{3} \\ \hline 2\ 1\ 2\ 8\ 6\ 9\ 8 \\ 1\ 4\ 1\ 9\ 1\ 3\ 1 \\ 3\ 1\ 9\ 3\ 0\ 4\ 7 \\ 7\ 0\ 9\ 5\ 6\ 6 \\ 7\ 0\ 9\ 5\ 6\ 6 \\ \hline 8\ 1\ 4\ 0.8\ 5\ 0^{3}.7\ 1\ 8^{6} \end{array}$$

8 1 4 0^{tt} —— 17^{f} —— 0^{d}

Soient enfin 3541. 15 ſols 8 den. à multiplier par 22 liv. 18 ſols 11 den. je trouve dans la Table de comparaiſon des livres, & de leurs parties, avec les 1000es de livre, ajoutée à la fin de ce chapitre, que 15 ſols font 750^{3} & 8 d. 333, je fais donc une ſomme de 750^{3} & de 33^{3}; ſçavoir 783^{3}, laquelle étant ajoutée aux 354 liv. propoſées, fait en tout 354783^{3}. Je trouve enſuite dans la même table que 18 ſols valent 900^{3}, & 11 ſols 46^{3} : ce qui fait en tout 946^{3}, leſquelles étant ajoutées aux 22 liv. propoſées, font 22946^{3} en tout. Multipliant donc 354783^{3} par 22946^{3} comme des Entiers, je trouve pour produit 8140850718^{6}, ou 8140850^{3}.7^{4}.1^{5}.8^{6}. Et comme les trois dernieres parties (7^{4}.1^{5}.8^{6}) ſont ſuppoſées inſenſibles ; (puiſqu'on ne trouve que des tierces dans la Table,) il faut s'en tenir à 8140850^{3}, ou 8140.850^{3}, pour le produit deſiré. Cherchant donc 850^{3} dans la même Table de comparaiſon, on trouve que ces 850^{3} valent juſte 17 ſ. Ainſi le produit cherché eſt 8140 l. 17 ſ. 0 den. Il faut faire de même pour toutes les autres eſpeces d'Entiers, comme les toiſes, les perches, les li-

vres pesant, les muids, &c. & leurs parties, quand on aura des Réducteurs, ou des Tables pareilles à celles que nous proposons cy-après.

De la Division des Entiers, avec des parties décimales.

1r EXEMPLE.

Dividende $3\ 3\ 6^3$ } 6^2 *quotient.*
Diviseur $\ldots\ 5\ 6^1$ }

Reste 0 0

VI. Soit proposé la somme $3^1.3^2.6^3$ à diviser à 56^1, pour y parvenir je réduis d'abord l'une & l'autre somme dans les moindres parties proposées; sçavoir $3^1.3^2.6^3$ à 3363, & 5.6^1 à 56^1. E divisant 3363 par 56^1 comme des entiers, je trouve pour quotient 6^2, dont l'exposant 2 est la difference de celui du dividende 3, à celui du diviseur 1: dont il ne faut point chercher de meilleure preuve, sinon qu'ayant multiplié le quotient 6^2 par le diviseur 51^1, selon l'article précedent, le produit sont les 3363 proposées pour dividende, puisque la Division sert de preuve à la multiplication. D'où il faut conclure qu'en toute Division de décimales, la division étant faite comme pour des Entiers, l'exposant des décimales est égal à la difference des exposans de la somme à diviser & du Diviseur, réduis dans leurs moindres parties données.

2d EXEMPLE.

$3\ 4\ 7\ 0^4$ } 62^3
$\ldots\ 5\ 6^1$ }

$1\ 1\ 0$

$5\ 6$

Si l'on avoit encore 347^3 à diviser au même diviseur 56^1, & qu'on voulût avoir un quotient plus précis qu'en secondes, comme en tierces, on réduiroit les 347^3 proposées à 34704, lesquelles étant divisées comme ci-dessus,

par 56^1 donneroient pour quotient (62^3,) & à proportion pour avoir des quartes, des quintes, des ſextes, &c. au quotient. Si l'on a par éxemple $2.3^1 5^2$ à diviſer par $3^1.4^2$; & que l'on demandé un quotient en ſecondes, on réduira 235^2 à 23500^4, leſquelles étant diviſées par 34^2, donnent au quotient 691^2. Si l'on avoit $5.3^1.2^2$ à diviſer à 12 Entiers, & qu'on voulût un quotient en quartes, on réduiroit 532^2 à 53200^4, qui étant diviſées comme des entiers par 12, le quotient ſeroit 4433^4. Si au contraire on doit diviſer 12 entiers par $5.3^1.2^2$ & qu'on veüille un quotient en ſecondes, on réduira 12 entiers à 120000^4, leſquelles étant diviſées par 542^2, le quotient eſt 226^2 & ainſi des autres.

Remarquez qu'il peut arriver que le diviſeur excede tellement le Dividende, que le Quotient de leur diviſion ſeroit des décimales moindres qu'aucune qui fût d'uſage, comme ſi l'on propoſoit ($2^1.3^2$) à diviſer à ($532.1^1.2^2$,) en ſuppoſant que les moindres parties uſitées ſoient les tierces. Ayant réduit l'une & l'autre dans leurs moindres parties données, on auroit 23^2 à diviſer à (53212^2,) & ajoutant 3 zéros au dividende ainſi 23000^5, afin que le quotient ſoit des tierces, on trouve que 23000^5 diviſées par 53212^2, ne donneroient pas une ſeule tierce : d'où il faut conclure que cette diviſion eſt alors impoſſible.

Diviſion d'entiers & parties par les décimales, pour les peuples qui n'employent pas les Parties décimales.

3e EXEMPLE.

8 1 4 0 8 5 ø ø ø ø⁶ } 22946³ 17 ſ. 0 d.
3 5 4 7 8 3³

1 0 4 5 1 9 0
3 5 4 7 8 3

3 5 5 6 2 4 0
3 5 4 7 8 3

1 6 3 1 9 3 0
3 5 4 7 8 3

2 1 2 7 9 8 0
3 5 4 7 8 3

Soient 8140 liv. à diviſer par 354 l. 15 ſ. 8 d. Pour cet effet on prendra la valeur de 17 ſols en Tierces, ou milliémes, dans la Table de cõparaiſon des Tierces avec les livres, & leurs parties ci-après; laquelle donnera 850³, qui étant jointes avec 8140 liv. donnent en tout 8140850³ pour le Dividende. Et pour le Diviſeur on trouvera dans la même Table pour la valeur de 15 ſols 750³, & 33³ pour 8 den. comme dans l'article precedent, dont la ſomme eſt 783³; leſquelles étant ajoutées aux 354 l. donnent pour le Diviſeur 354783³. Diviſant donc 8140850³ ou 8140850000⁶ par 354783³, comme pour les Entiers, il vient au Quotient 22946³, ou 22 l. 946³. C'eſt pourquoi cherchant auſſi dans la Table de comparaiſon au droit des ſols 946³, je vois que le nombre qui eſt approché le plus eſt 18 ſols, qui valent 900³ juſte. Ainſi je cherche encore au

droit des deniers 46^3, & je prens le nombre qui en approche le plus ; ſçavoir 11 deniers : d'où je conclus que le Quotient déſiré eſt 22 livres 18 ſ. 11 den. & de même à proportion pour tous les autres éxemples.

Des régles de Proportion par les Décimales pour les peuples qui n'employent pas les décimales.

VII. Suppoſez que l'on ait cette Régle à réſoudre. [Si 354 liv. 15 ſols 8 den. ont ſuffi pour acheter 30 toiſes, 5 pieds, 6 pouces, 9 lig. de terrain ; combien aura-t'on du même terrain pour 22 liv. 18 ſols 11 deniers ?] Pour y parvenir, je réduis d'abord les livres, ſols & deniers du premier & du 3e lieu de la régle en Tierces, au moyen de la Table de comparaiſon des livres ; ſçavoir 354783^3, & 22946^3 ; & auſſi les toiſes, pieds, pouces & lignes du ſecond lieu, au moyen de la Table ou Réducteur particulier pour la comparaiſon des milliémes de l'Entier, avec les Toiſes, pieds, pouces, & lignes ; & je trouve que 5 pieds valent 833 tierces, & 6 pouces 83 tierces, 9 lignes 10 tierces. Ajoutant donc toutes ces tierces avec les 30 toiſes, la ſomme eſt 30926^3 pour le ſecond lieu de la Régle. Et comme le premier & le 3e lieux ſont des Tierces, on peut les prendre pour des Entiers, en les ſuppoſant multipliez chacun par 10[illegible]. (ce qui ne change rien à la régle, puiſqu'on ne fait autre choſe par là que d'élever également ſon Dividende & ſon Diviſeur.) Multipliant donc enfin les 30926 Tierces de toiſe par 22946, & diviſant le produit 709627996 par 354783 comme pour des Entiers à l'ordinaire, il vient au Quotient 2000 tierces de toiſe, que je réduis en Toiſes, pieds, pouces & lignes, au moyen de la même

Table, ou du Réducteur : ce qui donne enfin pour la réponse desirée (2 toises, 0 pids, 0 pouces, 0 lignes.

Des Racines Quarrées des fractions décimales.

VIII. Soient les deux longueurs 5 toises $3^{1}.4^{2}.7^{3}$, ou tout d'un coup 5347^{3}, & 7 toises $5^{1}.6^{2}.3^{3}.2^{4}$, ou tout d'un coup 75632^{4}, dont on ait besoin de comparer les racines quarrées entr'elles. Pour y parvenir, ayant mis ces deux sommes en même dénomination en quartes, ainsi ($53470^{4}.75632^{4}$,) je les regarde alors comme des toises ; ainsi il ne s'agit plus que de tirer les racines quarrées des deux nombres Entiers 53470. 75632, ces deux nombes entiers ayant même raport entr'eux, que si c'étoient des Tierces. Tirant donc les racines de ces deux nombres à l'ordinaire, je trouve (231) pour la premiere, & (275) pour la derniere ; c'est-à-dire, que ces deux racines approchées à moins d'une unité près, expriment à peu de chose près, le raport desiré des deux longueurs proposées 5 toises, $3^{1}.4^{2}.7^{3}$, & 7 toises, $5^{1}.6^{2}.3^{3}.2^{4}$.

Extraction des racines par les décimales pour les peuples qui n'employent pas les decimales.

Si l'on avoit 5 toises, 2 pieds, 1 pouce, & 7 toises, 3 pieds, 4 pouces, 6 lignes dont il fallût comparer les racines, on les changeroit en 53470^{4}, & 75632^{4}, & on acheveroit comme ci-dessus.

Nous ne donnons point la maniere de tirer les racines quarrées des toises quarrées avec des dé-

cimales, parce que c'eſt un fait qui regarde uniquement la Géométrie : c'eſt pourquoi nous attendrons pour cela que nous ayons occaſion de donner notre Géométrie Théori-pratique au public.

PREMIERE TABLE

pour la comparaiſon des livres, ſols & deniers, avec les Tierces, ou Milliémes de la livre.

Sols.	*Tierces.*	*Den Tierc.*
1	50	1 . 4
2	100	2 . 8
3	150	
4	200	3 . 12
5	250	4 . 16
6	300	
7	350	5 . 20
8	400	6 . 25
9	450	
10	500	7 . 29
11	550	8 . 33
12	600	
13	650	9 . 37
14	700	
15	750	10 . 42
16	800	
17	850	11 . 46
18	900	
19	950	12 . 50
20	1000	

DEUXIE'ME TABLE

pour la comparaiſon des toiſes, pieds, pouces & lignes, aves les Tierc. ou Milliémes de la toi.

Piés Tierc.	*Pouc. Tierc*	*Lig. Tierc.*
1 . 167	1 . 14	1 . 1
	2 . 28	2 . 2
2 . 333	3 . 42	3 . 3
	4 . 56	4 . 5
3 . 500	5 . 69	5 . 6
	6 . 83	6 . 7
4 . 667	7 . 97	7 . 8
	8 . 111	8 . 9
5 . 833	9 . 125	9 . 10
	10 . 139	10 . 12
	11 . 153	11 . 13
6 . 1000	12 . 167	12 . 14

TROISIE'ME TABLE

pour la comparaiſon des livres, onces, drachmes, deniers & grains, avec les Quartes ou dixmilliémes de l'Entier.

Onces, quartes	Dra. quar	Den. quar	Gra. quar	Gra. Quart.
1—625	1—78		1— 1	13—14
2—1250			2— 2	14—15
3—1875	3—156	1—26		
4—2500			3— 3	15—16
5—3125	3—234		4— 4	16—17
6—3750				
7—4375	4—312		5— 5	17—18
8—5000			6— 7	18—20
9—5625	5—391	2—52		
10—6250			7— 8	19—21
11—6875	6—469		8— 9	20—22
12—7500			9—10	21—23
13—8125	7—547		10—11	22—24
13—8750			11—12	23—25
15—9375	8—625	3—78	12—13	24—26
16-10000				

IX. A l'égard de la conſtruction de ces Tables, rien n'eſt plus aiſé. Pour ſçavoir (par éxemple) combien 1 ligne vaut de décimales, on conſidere qu'une ligne eſt la 864e partie de la toiſe; ainſi il ne s'agit que de changer $\frac{1}{864}$ en milliémes par cette analogie. [Si le dénominateur 864 de la fraction $\frac{1}{864}$ donne le numérateur (1,) que donnera le dénominateur propoſé 1000? Et pour n'être point embaraſſé de la fraction qui pourroit venir à la réponſe, on ajoute 3 ou 4 zéros au 3e terme 1000 par régle generale ainſi 1000000; & la régle

étant finie, on trouve que $\frac{1}{864}$, ou une ligne eſt la même choſe que $\frac{1157}{10000000}$ de toiſe, leſquels on double pour avoir la valeur de deux lignes; ſçavoir 2314 milliémes, & que l'on triple pour avoir celle de 3 lignes; ſçavoir 3471 milliémes, & ainſi de ſuite juſqu'à 12 lignes, après quoi l'on retranche les trois dernieres figures de chacune de ces valeurs trouvées, pour avoir les valeurs d'une ligne, de 2 lignes, &c. en milliémes ſeulement; ſçavoir 2 milliémes, 3 milliémes, &c. On fait de même à proportion pour toutes les autres eſpeces.

CHAPITRE IV.

Parallelle de mes méthodes, avec quelques-unes des plus uſitées.

SUR LA SOUSTRACTION.

2 9 3 9 4 9 5
3 0 4 0 5 0 6 0
2 9 8 9 8 9 8 9
5 0 6 0 7 1

ART. I. SOit repeté ici le 3e éxemple du chapitre 2 de la 1re Partie, où l'on a la ſomme 29898989 à ôter de 30405060. On a dit dans la Théorie de ce chapitre; que l'opération qui paroît la plus naturelle eſt; 1° d'emprunter 1 ſur le chiffre pénultiéme 6, & d'écrire le reſte 5 au deſſus; 2° de joindre cet 1 au zéro ſuivant pour ôter 9 de 10, & avoir le reſte 1; 3° qu'il faut emprunter 1 ſur le 5 précedent, & écrire le reſte 4 au deſſus; 4° qu'il faut joindre, cet 1 au zéro ſuivant, pour faire 10; en prendre encore 1 & écrire de

même le reſte 9 au deſſus; 5° qu'il faut joindre cet 1 au 5 ſuivant pour faire 15, & ôter 8 de 15 pour avoir le reſte 7; 6° qu'il faut enſuite ôter 9 de 9, pour avoir le reſte 0; 7° qu'il faut de même emprunter 1 ſur le 4 précedent, & écrire 3 au deſſus; 8° qu'il faut joindre, cet 1 avec le zéro ſuivant, pour faire 10; en prendre 1, & écrire le reſte 9 au deſſus; 9° qu'il faut ajouter cet 1 au 4 ſuivant, pour faire 14, dont il faut ôter le 8 de deſſous, pour avoir le reſte 6; 10° qu'il faut enſuite ôter 9 de 9 pour avoir le reſte 0; 11° qu'il faut enfin emprunter 1 ſur le 3 précedent, & écrire le reſte 2 au deſſus; 12° joindre cet 1 au zéro ſuivant, pour faire 10, en ôter 1, & écrire le reſte 9 au deſſus; 13° qu'il faut enſuite joindre cet 1 au 3 ſuivant, pour faire 13 & en ôter 8 pour avoir le reſte 5; 14° qu'il faut ôter 9 de 9; 15° & 2 de 2 pour avoir leurs reſtes zéro: ce qui fait, comme on voit, 15 opérations.

Or ſelon notre métode; 1° on ôte 9 de 10 pour avoir le reſte, ſans s'embaraſſer où l'on prend cette dixaine; 2° on ôte 9 de 16 pour avoir le reſte 7, ſans s'embaraſſer où ſe prend la dixaine empruntée; 3° on ôte de même 10 de 10 pour avoir le reſte 0; 4° on ôte de même 9 de 15 pour avoir le reſte 6; 5° on ôte de même 10 de 10 pour avoir le reſte zéro; 6° on ôte de même 9 de 14 pour avoir le reſte 5. 7° on ôte de même 10 de 10; 8° & 3 de 3, pour avoir leurs reſtes zéro: ce qui ne donne que huit opérations en tout, & qui fait voir que notre métode eſt par conſequent plus ſimple que la précedente, environ dans le raport de 8 à 15; c'eſt-à-dire preſque de moitié.

Ces opérations en renferment à la verité quelques-autres; mais ſi ſimples, (comme des additions ou emprunts d'unitez) que nous n'avons pas crû qu'on dût y avoir égard, ni les faire entrer

en parallelle, avec les opérations fondamentales.

De plus notre métode imite dans ſon progrès l'addition, qui eſt la plus ſimple de toutes les opérations de l'Arithmétique; en retenant les dixaines empruntées, pour les ajouter aux chiffres précedens.

Enfin cette eſpece de ſouſtraction eſt ſans contredit, la plus commode pour faire la Diviſion & l'Extraction des Racines quarrées & Cubiques: ce qui ſuffira de faire voir à l'égard de la Diviſion: ces deux dernieres opérations s'achevant toujours au moyen de la Diviſion, comme on a pû le voir dans le premier chapitre de cette ſeconde Partie, à l'égard de l'Extraction des racines quarrées; ſur quoi l'on pourroit apporter déja par avance l'experience pour raiſon. Car lorſqu'on enſeigne la Diviſion par nôtre méthode à une perſonne, qui eſt accoutumée depuis long-temps à pratiquer la premiere eſpece de ſouſtraction, il ne manque jamais de la quitter de lui-même, & comme naturellement pour pratiquer la nouvelle; ſans doute par la plus grande facilité qu'il ſent à ſe ſervir de celle-ci.

Il eſt vrai qu'il y a des calculateurs qui retiennent dans leur mémoire tous les emprunts que nous venons de faire dans la 1re maniere de ſouſtraire; mais il faut avouer auſſi que c'eſt donner la torture à ſa mémoire, ſans neceſſité, & s'expoſer au péril de manquer ſon opération: ce qui n'arrive que trop ſouvent à ceux qui ne calculent pas ordinairement, dans leſquels on remarque même qu'ils oublient aiſément cette premiere métode, toute naturelle qu'elle paroît, par le grand nombre d'opérations auxiliaires qu'elle ſuppoſe.

Sur la Diviſion des Entiers.

II. La Diviſion n'a eſſentiellement que quatre eſpeces ; ſçavoir deux generales, qui ſe ſubdiviſent chacune en deux autres. La premiere eſpece generale eſt celle dans laquelle la preuve (qui eſt toujours compoſée d'une multiplication & d'une diviſion) ſe fait en allant de droite à gauche ; ſes deux eſpeces particulieres ſont, la premiere celle dans laquelle la ſouſtraction ſe fait en même-temps que la multiplication, comme dans la Diviſion, dont je me ſuis ſervi dans le chapitre 5e de la premiere Partie ; on la nomme vulgairement Diviſion Eſpagnole ; la ſeconde celle dans laquelle on écrit le produit de la multiplication ſous le dernier Dividende, & on l'ôte enſuite de ce Dividende par une des deux métodes de ſouſtraction ci-deſſus ; cette maniere de diviſer ſe nomme communément Italienne. La ſeconde eſpece generale eſt celle dans laquelle on fait ſa preuve, en commençant à gauche, & continuant vers la droite. Dans la premiere de ſes deux eſpeces particulieres, la ſouſtraction ſe fait en même-temps que la multiplication, & cette eſpece ſe nomme ordinairement Diviſion Françoiſe. Enfin on pourroit ajouter une 2de eſpece particuliere dans laquelle la multiplication & la ſouſtraction ſe feroient ſeparément, comme dans la Diviſion Italienne, mais cette eſpece eſt abſolument impraticable, parce qu'elle renfermeroit deux progrès de ſuite, entierement oppoſez au progrès naturel de la ſouſtraction & de la multiplication, dans leſquelles on procede toujours de droite à gauche. Il ne nous reſte donc que trois métodes à comparer, ſçavoir la Diviſion Eſpagnole,

l'Italienne & la Françoise. La premiere peut s'éxecuter en trois manieres differentes, dont la premiere est celle que nous avons enseignée dans le cinquiéme chapitre de la premiere Partie. Dans la seconde on écrit les restes au dessus du Dividende, au lieu que dans la premiere on les met au dessous. Et la troisiéme est celle que j'ai renduë publique dans le Mercure de Paris du mois de Mars 1713, que je nomme nouvelle Division Françoise.

Nouvelle Division Espagnole.

5009~~0~~6~~0~~~~0~~ { 8238
608 ~~0~~ { $\frac{356}{608}$

1450
608

2346
608

5220
608

Reste 356

Ancienne Division Espagnole.

~~5~~3 { 8238
~~2~~3~~2~~5 { $\frac{356}{608}$
~~1~~4~~5~~4~~2~~6
~~5~~~~0~~~~0~~~~9~~~~0~~~~6~~~~0~~~~0~~
~~6~~~~0~~~~8~~~~8~~~~8~~~~0~~
~~6~~~~0~~~~0~~~~0~~
~~6~~~~6~~

Nouvelle Division Françoise.

Diviseur 608~~0~~ { 8238
Divid. 5009 { $\frac{356}{608}$

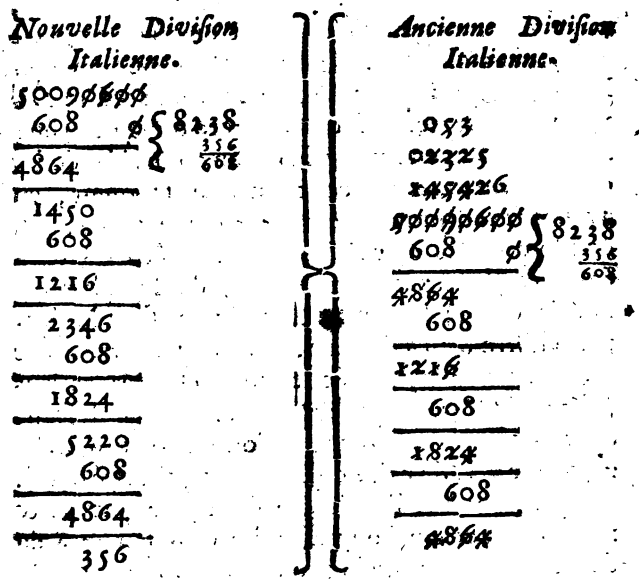
145.0

234.6
522.0

356.~~0~~
Dernier Reste.

Ancienne Division Françoise.

3
~~5~~~~4~~
~~1~~~~2~~~~3~~~~2~~~~5~~
~~2~~~~4~~~~5~~~~4~~~~2~~~~6~~
~~5~~~~0~~~~0~~~~9~~~~0~~~~6~~~~0~~~~0~~ { 8238
~~6~~~~0~~~~8~~~~8~~~~8~~~~0~~ { $\frac{356}{608}$
~~6~~~~0~~~~0~~~~0~~
~~6~~~~6~~



Nous réſoudons un même exemple par les 3 eſpeces de la Diviſion Eſpagnole, par les 2 manieres Italiennes, & par la Françoiſe ancienne, afin qu'on puiſſe mieux les comparer. De plus nous avons répeté le diviſeur dans la diviſion Italienne, comme on le repete dans les deux anciennes Eſpagnoles & dans la Françoiſe, afin qu'on puiſſe en faire une comparaiſon plus juſte. Dailleurs lorſqu'on écrit ce Diviſeur à part, pour ne le point repeter, comme font quelques-uns, on eſt beaucoup plus en danger de ſe tromper; à moins que d'avoir autant d'habitude dans le calcul que les Maîtres. Dans l'ancienne Diviſion Françoiſe, Eſpagnole & Italienne, où l'on écrit les reſtes de la diviſion au deſſus du Dividende, on a ſoin de barrer tous chiffres dont on retranche, à meſure qu'on opére, de crainte de s'embroüiller. Mais cet effacement

empêche de pouvoir repaſſer ſur ſon opération, pour voir ſi l'on ne s'eſt point trompé : ce qui eſt un deffaut eſſentiel. Dans la nouvelle Diviſion Françoiſe que je propoſe, on écrit d'abord le Diviſeur 6080, dont on barre le zéro qui eſt à la fin; à cauſe qu'il y en a un auſſi à la fin du Dividende, lequel Dividende on écrit ſous le Diviſeur, en avançant ſon premier chiffre 5 d'une place, afin que le premier 6 du Diviſeur puiſſe être contenu dans les deux premiers (50.) du Dividende à l'ordinaire; & lorſqu'on eſt parvenu ſous le dernier chiffre 8 du Diviſeur, ſous lequel ſe trouve le 9 du Dividende, on écrit les 4 chiffres reſtans (0600) du Dividende ſous ce 8 & ce 9, en deſcendant directement en bas, & l'on barre le dernier zéro, à cauſe de celui du Diviſeur qui a eſté barré.

Ayant donc à l'ordinaire diviſé 50 par 6, & mis 8 au quotient, on multiplie ce 8 par le 8 du diviſeur, & l'on ôte le produit de 69 qui eſt au deſſous, le reſte eſt 5, qu'on écrit au devant du 1e zéro deſcendu vers la gauche, retenant 6. On multiplie enſuite 8 par 0, à quoi on ajoute 6 de retenu, & l'on ôte la ſomme 6, de 10 qui eſt au deſſous; le reſte eſt 4, qu'on écrit encore au devant du 5 vers la gauche, retenant 1. Enfin on multiplie 8 par 6, & l'on ajoute 1 de retenu au produit : ce qui donne 49, qu'on ôte de 50, le reſte eſt 1, qu'on écrit de même au devant du 4, ainſi le reſte total de cette premiere diviſion eſt 1450. Enſuite on recommence une ſeconde diviſion, en diviſant 14 par 6 : ce qui donne au quotient 2, & multipliant 608 par ce 2, on ôte le produit de 1450 comme ci-deſſus, écrivant le reſte au devant du 6 deſcendu vers la gauche, ce qui donne pour 2e reſte 2346. Diviſant donc encore 23 par 6, il vient 3 au quotient, par lequel multipliant 608, &

ôtant le produit de 1346, le reſte eſt 522, qu'on écrit encore au devant du ſecond zéro deſcendu: ce qui donne pour troiſiéme reſte total 5220. Enfin diviſant 52 par 6, le quotient eſt 8, par lequel multipliant 608, & ôtant le produit de 5220, il vient (356,) qui eſt le dernier reſte de la diviſion, puiſque le dernier zéro deſcendu du dividende, auquel il eſt joint, eſt barré.

La proprieté particuliere de cette Diviſion eſt de n'écrire le Diviſeur qu'une ſeule fois, & que ce diviſeur ſe trouve toujours naturellement rangé ſur ſon dividende, dans la ſcituation qu'il doit avoir.

Si l'on compare maintenant ces 5 métodes, on verra premierement, que les deux 1res Eſpagnoles ont un même nombre d'opérations, quoique l'ancienne n'ait que 43 chiffres, au lieu que la nouvelle en a 46. Comparant enſuite chacunes de ces deux avec l'ancienne Françoiſe; on trouve que celle-ci eſt eſſentiellement plus longue qu'aucune de ces deux autres; à cauſe que dans la Françoiſe on emprunte pluſieurs fois ſur un même chiffre, quoiqu'il ſemble icy le contraire; la Françoiſe n'ayant que 45 chiffres. Mais il y a des diviſions où cette difference eſt tres-conſiderable, comme ſi l'on diviſoit (19999100007) par (99999, (on trouveroit qu'il y a 78 chiffres dans l'opération par la nouvelle Diviſion Eſpagnole, & 112 par l'ancienne Françoiſe: ce qui augmente l'opération de plus d'un grand tiers; on n'en trouveroit que 52 par nôtre nouvelle Françoiſe & par l'ancienne Eſpagnole: ce qui abregeroit l'opération de plus de moitié; mais à l'égard de l'ancienne Eſpagnole, cela n'arriveroit que par hazard; ſçavoir à cauſe des 9 qui ſe trouvent au Dividende & au diviſeur. Pour revenir à notre premier évemple, on trouve 61 chiffres dans la nouvelle Diviſion Italienne, &

59 dans l'ancienne : ce qui augmente l'opération d'un bon quart ; mais on n'en trouve que 34 par notre nouvelle Diviſion Françoiſe : ce qui l'abbrege au contraire d'autant, & ce qui la rend en cela préferable à aucune qui ait paru juſqu'ici. Je n'ay pas cependant voulu l'employer dans les calculs de ma premiere Partie, ſans ſçavoir auparavant comment elle ſera reçûë du Public. Au cas qu'elle ait un ſort heureux, je ſouhaiterois qu'elle paſſât ſous le nom de nouvelle Diviſion Françoiſe.

Sur la Multiplication des parties.

3e *Méthode par réduction parties.*

III. Nous reprendrons encore ici le 3e éxemple du chapitre 8 de la premiere Partie, dans lequel on propoſe (5 liv. peſ. 6 onces 3 drachmes) à multiplier par (4 l. peſ. 2 onces, 7 drachmes.) Or cette opération ſe peut faire encore en quatre manieres differentes des deux que j'ai expliquées, dont j'ay nommé l'une multiplication effective, & l'autre par parties proportionnelles.

5 liv. peſ. — 6 onces. — 3 drach. } 16 liv. peſ. } 2888
4 — 2 — 7 dr. } 8/128 } 8 [dr

5	4	691 d	1045	361
16	16	585 d	128	16
80	64	3455	21 dd	22 l.
6 on.	2	2073	72	peſ.
86	66	3455	42	9 onc.
8	8	369685 ds. dr.	147	0 drac.
688	528	128	25128 gr	11 gr.
3	7	11368 d	128	
691 dr.	535 d	128 2888	232	11 gr.
		1128 dr	128	
		128		
		1045		

La troiſiéme pratique que je propoſe ici eſt de réduire l'une & l'autre ſomme en drachmes, qui ſont leurs moindres parties : ce qui donne 691 drachmes à multiplier par 535 drachmes. La multiplication étant faite à l'ordinaire, il vient au produit 369685 dr. de dr. leſquelles étant diviſées par 128, valeur de la livre en drachmes, donnent 2888 drachmes, qui s'évaluent par la diviſion à 22 l. peſ. 9 onc. & il reſte encore 21^{dd} que je réduis à 11 grains, comme dans le chapitre 8. Or ſi l'on compte tous les chiffres qui entrent dans cette opération, on en trouvera 135, au lieu qu'il n'en entre que 95 dans celle que nous avons employée dans le chapitre cité, pour réſoudre cet exemple, comme chacun peut le voir : ce qui fait preſque un tiers d'opération de moins, & qui vaut ce me ſemble bien la peine qu'on y ait égard.

4e *Métode par régle de proportion.*

La quatriéme maniere eſt de réſoudre cette régle de proportion droite [Si 1 liv. peſ. | donne 5 liv. peſ. 6 onc. 3 drac. || combien donneront 4 livres peſ. 2 onc. 7 drachmes ?

Mettant donc 1 livre peſant, & 4 liv. peſant 2 onces, 7 drachmes, en drachmes à l'ordinaire, la régle de proportion ſe change en celle-ci. [Si 128 drachmes donnent 5 livres peſant 6 onces, 3 drachmes, combien 535 drachmes ?] Or cette régle étant réſolue, comme on l'enſeigne dans le chapitre 10 des Régles de proportion droites, on trouve encore pour le quatriéme terme (22 livres peſant, 9 onces, 0 dragmes, 11 grains,)

Si 128 drach. | 5 liv. pes. 6 onces. 3 dr. 535 | 535 dr. | 22 l.p. 9 o. 0 d. 11 gr. Réponse.

2675 l.p. - 3210 onc. | 1605 dr. | 5050 onces | 2069 dr

128 | 20 l.p. 9 onc. | 2 | 2 l.p. 9 onc.

115 | 128

16 | 8 | 128 dr.

4 liv. pes. | 16 | 64 | 2 | 66 onc. | 8 | 528 | 7 | 535 drac.

115 | 16 | 690 | 115 | 3210 | 5050 onces.

5050 | 128 | 39 o. | 1210 | 128 | 58 | 8 | 464 d | 1605 | 2069 d

2069 | 128 | 16 | 789 | 128 | 21 | 72 | 42 | 147 | 1512 | 128 | 11 gr. | 232 | 128

comme cy-deſſus ; mais cette opération eſt encore plus longue que la précédente, puiſqu'on employe dans celle-cy 150 chiffres pour la réſoudre : ce qui ſurpaſſeroit l'opération que nous avons expliquée de beaucoup plus que du tiers.

Cinquiéme métode par les décimales.

La cinquiéme métode eſt par les milliémes parties de l'Entier, en ſe ſervant des tables que nous avons jointes à la fin du chapitre précedent, dans leſquelles je trouve que 16 onces valent 3750 dix milliémes, & 3 drachmes 234 dix milliémes ; leſquelles étant ajoûtées aux précedentes, & avec 5 livres peſant, font 53984 dix milliémes en tout. Je trouve encore que 2 onces valent 1250 dix milliémes, qui étant ajoûtées aux précédentes, & à 4 livres peſant, font 41797 dix milliémes en tout. Multipliant donc 53984 dix

3750	1250
234	547
53984	41797
41797	lp. on. dr. gr
377888	22 9 0 10
485856	5636
377888	5625—9 onces.
53984	11—10 grains.
215936	

225636~~9248~~

dix milliémes par 41797 dix milliémes, le produit est 225636 dix milliémes, en retranchant les quatre dernieres figures; c'est-à-dire 22 livres pesant, & cherchant 5636 dix milliémes de reste dans les Tables, on trouve que 5625 valent 9 onces; ôtant donc 5625 de 5636, il reste 11, dix milliémes, qui font 10 grains. Ainsi le produit desiré est toujours 22 liv. pes. 9 onc. 0 dr. 0 d. 10 grains. Au reste ou n'employe que 86 chiffres environ dans cette opération : ce qui fait voir qu'elle est plus courte qu'aucune des précédentes.

Sixiéme Métode par les Logaritmes.

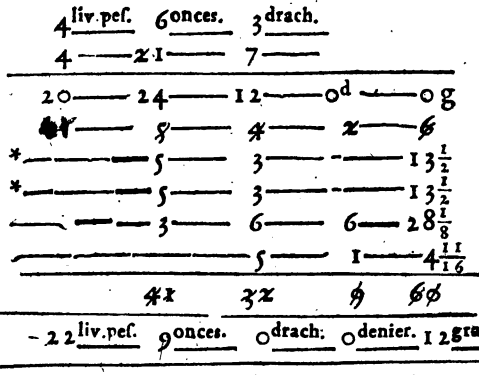
5	4
16	16
80	64
6	2
86 onc.	66 on.
8	8
688	528
3	7
691 drac.	535 dr.
28394780	27283538
	28394780
369685—	55678318

La sixiéme métode est par les Logaritmes. Ayant donc réduit 5 l. pes. 6 onces 3 dracmes à 691 drac. & 4 l. pes. 2 onc. 7 dr. à 535 drac. je cherche les logaritmes de 691 & 535; sçavoir 28394780 & 27283538 que j'ajoute en une somme 55678318, au droit de laquelle je trouve dans les Tables des logaritmes 369685

drachmes de drachmes, qui s'évaluënt à (22 liv. 9 onces, 0 dracmes, 0 den. 11 grains,) comme dans la 3e métode, avec laquelle, ſi on ſe donne la peine de la comparer, on verra que celle-ci employe au moins 140 chiffres, ſans compter la peine de trouver le nombre 369685, qui appartient à un logaritme, lequel ſurpaſſe 10000 de beaucoup: ce qui fait voir que cette métode eſt peut-être la plus longue de toutes.

2e *Méthode de la* 1re *Partie par les parties aliquotes.*

Enfin nous avons dit dans le même chapitre 8 de la premiere Partie, que la même multiplication pouvoit ſe faire encore par les parties aliquotes de la livre peſant, qui eſt nôtre ſeconde métode. C'eſt pourquoi nous l'éxecuterons encore icy par cette voye, afin que le lecteur puiſſe choiſir la plus courte des ſix.



Multipliant donc encore 5 liv. peſant, 6 onces, 3 drachmes, par 4 liv. peſant, 2 onces, 7 dracmes par parties aliquotes, comme nous l'avons enſei-

gné dans ce chapitre 8 au 5e éxemple, on trouve toujours pour le produit (22 liv. pes. 9 onc. 0 dr. 0 den. 12 grains, en employant environ 55 chiffres seulement, qui ne font guéres plus de la moitié de notre premiere opération. Ainsi il n'y a pas à balancer sur le choix de cette derniere métode, préferablement à toute autre, toutes les fois que les parties de l'Entier sont éxactes & simples, comme en cet éxemple. Aussi est-ce celle que la Nature a pour ainsi dire, enseignée à la plûpart des artisans & marchands, qui sans presque aucune arithmetique ne laissent pas d'estimer la quantité de leurs ouvrages & marchandises à peu de chose près, au moyen de cette régle.

CHAPITRE V.

Contenant quelques additions aux régles de la premiere Partie.

Sur les Caracteres Romains usitez dans le Commerce.

ART. I. JE trouve qu'on marque encore 80 ainsi (IIIIxx ;) 90 ainsi (IIIIxxX ;) 200 ainsi (IIc ;) 300 ainsi (IIIc ;) 400. (IVc ;) 500 (Vc *ou* Ↄ ;) 600 (VIc *ou* Ↄc, &c.) 1000 ($\overline{\text{I}}$) 10,000 (X M *ou* $\overline{\text{X}}$;) 100,000 (C M *ou* $\overline{\text{C}}$;) 1,000,000 (M M,) 10,000,000 (X M M ;) 100,000,000 (C M M.)

Régle de compensation de temps pour payemens à des marchands.

II. Une personne qui doit payer 10,000 livres

3000 ℔	2000 ℔	15
6	10	1000
18000	20000	15000
20000	53ϕϕϕ } 5	mois 9
15000	10ϕϕϕ }	jours.
53000	3	
	30	
	90 jours.	
	10 } 9 jo.	

à une autre; ſavoir 4000 liv. comptant; trois mille livres après ſix mois, 2000 liv. après dix mois, & 1000 liv. après quinze mois; le tout ſans intereſt, à compter du jour du contrat paſſé, s'offre (ſi cela l'accommode) de lui payer le tout enſemble dans un certain temps. On demande quel eſt ce temps, afin que l'un & l'autre y trouvent également leur compte. Pour réſoudre cette queſtion, il faut ſe ſouvenir qu'entre particuliers & marchands l'argent n'eſt eſtimé profiter qu'à raiſon de ſa quantité & de ſon temps, comme on l'a vû dans les régles de ſocieté compoſées, ſans avoir égard aux intereſts d'intereſts; comme il arriveroit, ſi un particulier ou marchand devoit les payemens ci-deſſus à un Banquier, à un Tuteur, pour ſes Pupilles, ou au Marguillier d'une Egliſe, pour l'intereſt de ſon Egliſe; leſquels font tous profiter non ſeulement les fonds, mais encore les intereſts. Il ſuit delà que ſi l'on multiplie 3000 liv. par 6 mois, 2000 liv. par 10 mois, & 1000 liv. par 15 mois, on aura trois nombres qui repreſenteront d'une maniere generale les profits que le débiteur eſt cenſé pouvoir faire des trois ſommes 3000 l. 2000 liv. & 1000, pour les temps de 6 m. 10 m. & 15 m. pendant leſquels elles doivent reſter entre ſes mains; leſquels profits, ajoutez en-

ſemble, doivent faire le même profit total, que feroit la ſomme de 10, 000 liv. reſtante entre les mains du même debiteur, pendant le temps déſiré. Or pour marquer ce dernier profit, de la même maniere que l'on a fait les profits particuliers cy-deſſus, il eſt bien évident, que ſi l'on avoit le temps deſiré, il ne faudroit que le multiplier auſſi par toute la ſomme de 10000 liv. Ce ſeul produit devant donc être égal aux trois produits, enſemble de 3000 liv. par 6; ſçavoir (18000 liv.) de 2000 par 10; ſçavoir (20000 liv.) & de 1000 liv. par 15; ſçavoir (15000 liv.) il eſt évident qu'il ne faut que faire une ſomme totale de ces trois produits; ſçavoir (53000 liv.) & la diviſer par la ſomme propoſée 10000, pour avoir le temps déſiré, qui ſe trouvera de 5 mois & neuf jours.

Régle de compenſation de temps, pour payemens à des Banquiers, Tuteurs & Marguilliers.

III. Mais ſi la propoſition ſe fait à un Banquier, Tuteur ou Marguillier, pour fait de Banque, Tutelle, ou Egliſe, il faut convenir de l'intereſt qu'une ſomme d'argent à ſouhait rapporte par an dans le temps preſent, comme (par exemple) $\frac{1}{24}$; ſuivant quoi le premier fond (ſuppoſé) 10000 liv. augmenteroit dans le raport de 24 à 25, pendant une année civile, ou 365 jours; & comme en mettant les intereſts à profit, le premier fond augmente par chaque année dans le même raport de 24 à 25, (comme on l'a vû dans les régles d'intereſts d'intereſts de la premiere Partie, chapitre 19,) il faut d'abord chercher combien augmenteroient ſur ce pied 3000 liv. en 9 mois ou 270 jours, pendant leſquels elles ſeroient entre les mains du creancier,

juſqu'à parfait payement, en faiſant la régle de proportion logaritmique. [Si la 270e puiſſance de la 365e racine de 24, donnent pareille puiſſance de racine de 25, que doivent donner 3000 livres ?] Réponſe. (3092 liv.) Il faut chercher de même de combien accroîtroient 2000 liv. pendant 5 mois ou 150 jours, entre les mains du creancier au même denier, par une ſemblable régle de proportion logaritmique. [Si la 150 puiſſance de la 365e racine de 24 donnent pareille puiſſance de racine de 25, que doivent donner 2000 ?] Réponſe. (2035 liv.) Enfin il faut chercher de combien accroîtroient 4000 liv. pendant 15 mois ou 450 jours entre les mains du creancier, ſur le même pied, par cette régle logaritmique. [Si la 450e puiſſance de la 365e racine de 24 donnent pareille puiſſance de racine de 25, que doivent donner 4000 ? Réponſe. (4207 liv.) Et ajoutant ces trois réponſes, on aura pour tout l'accroiſſement des trois payemens 4000 liv. 3000 liv. & 2000 liv. (334 liv.) Il ne s'agit donc plus que de trouver le temps pendant lequel la ſomme totale de 10000 liv. prendroit le même accriſſement de 334 liv. ou de 10000 liv. à 10334 liv. entre les mains du creancier, pour le même denier ($\frac{1}{24}$.)

Or le logaritme de 24 eſt encore 13802112, dont la 365e partie ($37814\frac{2}{365}$) eſt le logaritme de la 365e racine de 24. Multipliant donc $37814\frac{2}{365}$ par 270, on a (10209781) pour le logaritme de la 270e puiſſance de la 365e racine de 24, qui ſera le premier lieu de la 1re analogie. De plus le logaritme de 25 eſt 13979400; dont la 365e partie ($38299\frac{53}{73}$, eſt le logarime de la 365e racine de 25; lequel étant multiplié auſſi par 270 donne (10340926) pour le logaritme de la 270e puiſſance de la 365e racine de 25, qui eſt le ſecond

lieu de l'analogie, auquel ſecond lieu, ajoutant 34771212 logarime de 3000. qui en eſt le 3e lieu, & de la ſomme retranchant 10209781 ci-deſſus, il reſte pour quatriéme lieu (34902357) logaritmes de (3092 liv.) pris dans les Tables, conformément à la pratique des régles de proportion logaritmes, que nous avons donnée dans le chapitre 19 de la premiere Partie.

Multipliant de même ($37814\frac{2}{365}$) ci-deſſus par 150, on a le logaritme de la 150e puiſſance de la 365e racine de 24; ſçavoir 5672101, 1r lieu de la régle de proportion. Multipliant auſſi $38299\frac{53}{73}$ par 150, on a le logaritme de la 150e puiſſance de la 365e racine de 25; ſçavoir (5744959,) ſecond lieu de la régle, auquel ajoutant le logaritme de 2000; ſçavoir 33010300, troiſiéme lieu de la régle, & retranchant de la ſomme 5672101 ci-deſſus, il reſte 33083158, logaritme de (2035 liv.) pris dans les Tables.

Multipliant auſſi $37814\frac{2}{365}$ par 450, il vient 17016302, logaritme de la 450e puiſſance de la 365e racine de 24, premier lieu de la régle de proportion. Et multipliant encore $38299\frac{53}{73}$ par 450, on a 17234877 pour le logaritme de la 450e puiſſance de la 365e racine de 25, ſecond lieu de la régle; auquel ajoutant 36020600, logaritme de 4000, qui en eſt le troiſiéme lieu, on a 53255477, duquel retranchant 17016302 ci-deſſus, il reſte 36239175, logaritme de (4207 liv.) dans les Tables.

Enfin multipliant auſſi $37814\frac{3}{365}$ par le temps deſiré (T,) il vient ($T \times 37814\frac{2}{365}$) pour le logaritme de la puiſſance (T) de la 365e racine de 24 1r lieu de la régle de proportion logaritmique. Et multipliant de même ($38299\frac{53}{73}$) par le même temps deſiré (T,) il vient vient ($T \times 38299\frac{53}{73}$.)

pour le logaritme de la puissance (T) de la 365e racine de 25, second lieu de la régle de proportion logaritme, auquel ajoutant le logaritme de 10000; sçavoir 40000000, 3e lieu; & retranchant [redacted] le 1r lieu cy-dessus, il vient pour le 4e lieu ($T \times 38299\frac{53}{73}$, plus 40000000, moins $T \times 37814\frac{2}{365}$, qui est le logaritme du fond 10000 liv. augmenté pendant le temps (T.) Or il est manifeste que ce 4e lieu doit donner 10334 liv. cy-dessus, afin que le creancier trouve également son compte après les quinze mois écoulez, soit qu'on le paye par parties, soit qu'on le paye tout à la fois. On aura donc cette Egalité à résoudre ($T \times 38299\frac{53}{73}$ plus 40000000 moins $T \times 37814\frac{2}{365}$) d'une part égal à (40142685) qui est le logaritme de (10334) d'autre part. Et retranchant 40000000 de part & d'autre, on aura encore ($\overline{T \times 38299\frac{53}{73} \text{ moins } 37814\frac{2}{365}}$) de la 1re part, égal à (00142685) de la 2e part; c'est-à dire ($486 \times T$) de la premiere part, égal à (142685) de la 2e. D'où il est manifeste que si l'on divise (142685) par (486), le quotient (294 jours, ou 9 mois & 24 jours) sera le temps desiré (T.)

Régle de compensation de payement à des Marchands.

IV. Une personne est obligée de payer 300 l. à un Marchand au bout de 18 mois, à condition d'en payer de plus l'interest au denier 10 pour une année : 3 mois $\frac{1}{2}$ après il propose à son creancier de le payer entierement, pourvû qu'il lui rabate le profit qu'il pourra faire de ce payement, pendant le temps qui reste, jusqu'à l'écheance de la dette, qui est de 14 mois $\frac{1}{2}$, à raison du denier 10.

Pour réſoudre cette queſtion, faites cette régle de Proportion compoſée droite. [Si 10 liv. en 12 mois produiſent 1 liv. d'intereſt, combien par proportion la ſomme que l'on propoſe de payer comptant (que je nomme (S) multipliée par ſon temps 14 mois $\frac{1}{2}$ ou 29 demi mois) produira-t'elle ?] La réponſe eſt $\left(\frac{\frac{29}{2} \times S}{10 \times 12}\right)$ d'intereſt pendant 14 mois $\frac{1}{2}$; c'eſt-à-dire (S) multipliée par $\frac{29}{2}$ & le produit diviſé par 10 fois 12; à laquelle valeur il faut ajouter le principal (S,) pour avoir le payement total au bout des 18 mois: ce qui fait $\left(\frac{\frac{29}{2} \times S \text{ plus } S}{10 \times 12}\right)$ ou encore $\left(\frac{\frac{29}{2} S \text{ plus } 10 \times 12 \times S}{10 \times 12}\right)$, ce qui ne change que la forme, ſans changer la valeur. Or cette ſomme doit être égale à la dette 300 livres, plus ſes intereſts de 45 livres pour 18 mois, au denier 10 par an; c'eſt-à-dire à (345 liv.) ce qui donnera, en multipliant, ces deux quantitez par (120,) $\frac{29}{2}$ S plus 120 S, ou ($\frac{269}{2}$ S.) égal 120 fois 345, ou (41400,) ou encore (269 × S) égal à (82800. D'où l'on tire, en diviſant chaque quantité par 269, (S) égale à 307 liv. 16 ſols 2 den.) dont on peut aiſément faire la preuve par la régle de proportion compoſée ci-deſſus. [Si 10 liv. en 12 mois donnent 1 liv. d'intereſt, que doivent donner 307 l. 16 ſ. 2 d. en 14 mois $\frac{1}{2}$ d'intereſt? Il vient pour réponſe (37 liv. 3 ſols 10 den.) qui étant ajoutez à leur principal 307 liv. 16 ſols 2 deniers, font les 345 liv. qu'il faudroit payer au bout de 18 mois.

Si l'intereſt avoit été à 7 $\frac{1}{2}$ pour 100, ou 15 pour 200 (ce qui revient à 3 pour 40 par an, la régle auroit été [Si 40 liv. en 12 mois donnent 3 liv. combien (S) en 14 mois $\frac{1}{2}$ ou $\frac{29}{2}$ mois ?

ce qui auroit donné pour l'intereſt de S en $\frac{29}{2}$ mois $\left(\frac{3 \times S \times \frac{29}{2}}{40 \times 12}\right)$, auquel ajoutant (S) de Principal, on a $\left(\frac{\frac{87}{2}S + 408\,S}{480}\right)$ qui eſt la même choſe que $\left(\frac{87 \text{ plus } 960 \times S}{960}\right)$ ou que $\left(\frac{1047}{960} \times S\right)$ ou encore $\frac{349}{320} \times S$, qui eſt le payement total au bout des 18 mois, lequel doit être égal à 300 liv. plus ſon intereſt pour 18 mois à $7\frac{1}{2}$ pour 100 par an. Or on a cet intereſt par cette régle de proportion compoſée. [Si 40 liv. en 12 mois donnent 3 liv. combien 300 liv. en 18 mois? Réponſe 33 liv. 15 ſols, qui ajoutez à 300 l. font 333 l. 15 ſ. en tout.] Multipliant donc chacune de ces deux quantitez par 320, il en reſulte l'égalité (349 × S) égal à 320 fois 333 liv. 15 ſols; c'eſt-à-dire à (106960 liv.) D'où il ſuit que ſi l'on diviſe cette ſomme de 106960 liv. par 349, le quotient (306 liv. 9 ſ. 6 den.) ſera la ſomme (S) équivalente deſirée. D'où l'on a tiré la régle generale.

Multipliez (12 mois) par le dénominateur (40) de l'intereſt, pour avoir un premier produit; multipliez encore (18) mois par le numérateur (3) du dernier pour avoir un ſecond produit; multipliez auſſi le même numérateur (3) par le temps ($14\frac{1}{2}$,) pour avoir un troiſiéme produit. Faites une ſomme des deux 1es produits, que vous multiplierez encore par (300) pour un quatriéme produit. Enfin faites une 2e ſomme du premier & du 3e produit, que vous diviſerez par le 4e Le Quotient ſera la ſomme que l'on doit comptant, équivalente à 300 liv. en 18 mois, leurs intereſts ajoutez.

payer

Régle de compenſation du payement à des Banquiers, Tuteurs & Marguilliers.

V. Suppoſez que dans l'article 3. on cherche la ſomme équivalente aux 10000 l. payables par termes; laquelle on veüille payer neuf mois & 24 jours avant l'échéance des 15 mois, il ne faudra pour y parvenir que ſe ſervir de l'équation de la fin de cet article (T × 38299 $\frac{16}{73}$ plus 40000000 l. moins T × 37814 $\frac{2}{365}$) égal à (40142685,) & y ſubſtituer à la place de T ſa valeur 9 mois & 24 jours, ou 294 jours, & en la place du logaritme 40000000 de 10000, le logaritme inconnu L. de la ſomme qu'on doit payer comptant; ce qui changera cette égalité en cette nouvelle forme (294 × 38299 $\frac{53}{73}$ plus L. moins 294 × 37814 $\frac{3}{365}$ égal (40142685,) ou en cette autre (294 × 38299 $\frac{53}{73}$ moins 37814 $\frac{2}{365}$, plus L. égal (40142685,) oncore en celle-cy (142802, plus L. égal à (40142685,) & retranc6ant 142802 de part & d'autre, il reſte (L.) égal à (39999883,) qui eſt le logaritme de 10000 liv. ce qui nous apprend que la ſomme qu'il faut payer comptant 9 mois & 24 jours avant l'écheance, eſt 10000 liv. comme on l'a ſuppoſé dans ce troiſiéme article pour trouver le temps équivalent. Ainſi cette régle ſert de preuve à ce 3e article.

Ces trois derniers articles pourroient ſe réſoudre auſſi par les Fauſſes Poſitions; mais la voye que nous avons ſuivie, qui eſt une eſpece d'Algebre naturelle, qui ſe trouve dans tous les hommes pour peu qu'ils s'appliquent, eſt incomparablement plus abregée, & ſe démontre par elle-même, étant

uniquement fondées ſur ces Axiomes ; ſçavoir [que deux quantitez égales demeurent encore égales, en leur ajoutant ou leur ôtant deux autres quantitez égales ; les multipliant ou diviſant par un même nombre, & prenant leurs puiſſances, ou tirant leurs racines quelconques également.] C'eſt pourquoi je m'abſtiendrai de donner rien icy ſur les Fauſſes poſitions, la métode que j'ai ſuivie étant plus étenduë & plus ſimple. Ceux qui auront quelque curioſité ſur la pratique & la Théorie des Fauſſes poſitions, & ſur la preuve de 9 & la nouvelle preuve de 11, pourront ſe contenter, par ce que j'en ai donné dans les Mémoires de Trevoux de Mars 1713, & dans le Mercure de Paris de Mars 1712 : ce que je ne répete point ici, pour ne pas faire perdre le temps au Lecteur.

FIN.

TABLE
DES PIECES DE L'AUTEUR
Que l'on trouve la plûpart répanduës dans differens Journaux ou Mémoires differens des siens.

Les étoiles marquent les pieces qui ont paru depuis la derniere liste qu'on a donnée au public.

MEMOIRES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES

Situation d'une lame tirée dans l'eau 1699.
Principe general de l'Equilibre des liqueurs, idem.
Loy generale du mouvement, & machine qui fait & démontre en même-temps les loix du mouvement,
Corps réguliers à plusieurs faces, idem.
Impossibilité du mouvement perpetuel, 1700.
Equivalence physique des systêmes de Tycho & de Copernic, idem.
La Gnomonique par les Etoiles fixes, 25 Juin 1701.
Critique d'un systême du mouvement, imprimé dans les Mémoires de Trevoux, même année.
Eprouvettes pour la poudre à canon, 1703.
Moyen mouvement d'un astre en Ascension droite, 1704.
Le frotement sur des plants inclinez, même année.
Le frotement des Coins, idem.
Le frotement des Vis, idem.
Le frotement des poulies, idem.
La perfection des machines mûës par des fluides qui élevent des poids, IDEM; corrigé en 1707 & 1708.
Experiences sur la force des bois, 1707.
Sur la force des tuyaux de conduite, idem.
Sur la force des poutres avec des tables, 1708.
Experiences & systêmes sur le ressort de l'air, idem.
Figures courbes, égales en surface & solidité. 1709.
Le point de rupture des figures geometriques, 1710.
Résolution d'un problême de geometrie proposé par M. Ozanam, idem.

Conjectures sur les actions des plantes, Avril 1711.
Phenomenes singuliers sur la nourriture des plantes, May 1711.
Explication d'une congelation de sang en figures polygones, 1711.
Problême general de perspective selon un certain système, idem.
Frotement des essieux dans les machines, 1712.
* *Les merveilles des Abeilles*, Avril 1712.
La nature de la Courbe de M. de Beaune, 1712.
* *Proportions & figures nouvelles des moulins à vent verticaux*, experiences & tables, IDEM.
Quatre nouveaux corps reguliers à une seule espece de face, idem.
Voyez le fameux Cabinet de Mr Pajot à Bercy.
* *Les frotemens des leviers, des engrennemens, & de la vis à bizeau*, 1713.
* *Regles generales pour calculer tout d'un coup un espace quelconque de la superficie & solidité sphérique, apliquées aux tonneaux sphéroïdaux couchez & non pleins*, 1714.
* *La perfection des Machines mûës par des animaux*, idem.

JOURNAUX DES SCAVANS.

La situation d'une lame tirée dans l'eau, 1699. *ci-dessus*, corrigé ci-après.
Principe general de l'équilibre des liqueurs, idem, *ci-dessus*.
Corps reguliers à 1, 2, & 3 espaces de faces, idem, *ci-dessus*.
Loy generale du mouvement, idem *ci-dessus*.
Impossibilité du mouvement perpetuel, 1710, *cidessus*.
Equivalence phisique des systêmes de Ticho & de Copernic, idem, *ci-dessus*.
Sur la beauté corporelle; deux memoires, idem.
Démonstration des 13 Theorémes de M. Huygens 1701.

Conjectures sur la pesanteur & autres vertus sympatiques & élastiques, idem.

Conjectures sur les changemens du Barometre, idem.

Sur la preference du système de Copernic à tous les autres possibles, idem.

Sur les mouvemens de l'Aimant, idem.

Sur les mouvemens des mers & des courans.

Ces Mémoires sont éclaircis & corrigez à la fin du 3 tome des Essais de Physique & de Mathematique, deuxiéme édition.

MEMOIRES DE TREVOUX.

La maniere la plus parfaite de construire & de mesurer les cartes géographiq. & corographiq. Juillet 1712.

Problême general de perspective, Octob. IDEM. *cidessus*

* *Proportions & figures nouvelles des aîles des moulins à vent verticaux, avec des experiences & des tables*, Décembre, IDEM, *cidessus.*

Nouveau système de Fortification, Février 1713.

* *Reflexions & démonstrations sur les Régles d'Alliage & sur les fausses positions*, Mars IDEM.

* *Sur la route & la vîtesse d'une surface plate verticale mûë dans l'eau*, Fév. 1714. corrigé *ci-après.*

* *Résolution d'un pendule proposé aux Sçavans par M Bernoulli, & ensuite par M. de l'Hôpital*, Juin 1714.

MERCURES DE TREVOUX.

Conjectures sur les changemens arrivez à la surface de la terre, Janvier 1711.

Observations & réflexions sur le froid de 1709. Fév. *id.*

Conjectures sur les actions des plantes, Av. 1711 *cidessus.*

Conjectures sur les principaux Phenomenes du sommeil, May 1711.

MERCURES DE PARIS.

Circulation du sang par le cœur du fœtus, Janv. 1712

Les merveilles de l'oreille, Février IDEM.

Mesures géometriques des voutes surhaussées & surbaissées, Mars 1712.

Suplément au Mémoire sur les changemens arrivez

à la ſurface de la terre, ci-deſſus, Mars, IDEM.
D'une eſpece d'homme marin, Mars IDEM.
Les Merveilles des Abeilles. Avril 1712, *corrigé en May ſuivant. ci-deſſus.*
Diſcours ſur la lumiere, Juillet 1712.
Suite, Aouſt IDEM.
Paraphraſe Françoiſe du tableau de Cebès diſciple de Socrate, Octobre IDEM.
Les merveilles de la Trachées artere Novemb. IDEM.
* *Preuve de la Muliplication par* 11, *& nouvelle Diviſion numerique*, Mars 1712.
* *De la Mélodie, ou chant à une ſeule partie*, Av. 1713
Suite, Juin IDEM.
* *Démonſtration de l'impoſſibilité de la Quadrature du cercle en nombres rationels*, Aouſt IDEM.
* *Diſſertation philoſophique & morale ſur l'ame des bêtes*, Septembre & Octobre, IDEM.
Chanſons Chinoiſes, avec le Pater en Chinois, Oct. IDEM
* *Réponſe à l'auteur de la critiq; ſur la preuve par* 11. id.
* *Obſervations ſur le Barometre pendant 7 années*, id.
* *Hiſtoire des tremblemens de Manoſque en Provence.* id

Les autres Ouvrages de l'Auteur ſont,

1°, *Des Elemens de Méchanique & de Phiſique, imprimez en François chez de Laulne en* 1699, *& commentez dans ſes Recherches & Eſſais.*

2°, *Deux tomes de Recherches de Mathematiq; & de Phyſique, imprimez en François en* 1705, 1re édition.

3°, *Trois tom. d'Eſſais & Recherches de Matemat. & de Phyſique, imprimez en* 1713, 2e édit. des 2. 1rs. *chez J. de Nully, ruë S. Jacques, à l'Image S. Pierre.*

De l'Imprimerie de JEAN-FRANÇOIS KNAPEN, ruë de la Huchette, à l'Ange.

SUPPLEMENT

A pluſieurs Problêmes publiés en differentes occaſions.

I. PROBLÊME.

Maniere de déterminer la ſituation, route, & viteſſe d'un Vaiſſeau, plus générale que les 2 que j'ai propoſées dans le ſecond Tôme de la premiere & ſeconde Edition de mes Eſſais & Recherches en 1705 & 1713, & qui les comprend toutes deux; avec une application à la pratique, pour conduire un Vaiſſeau quelconque par une route propoſée.

JE prens encore ici le rectangle *FMWH* (2e Figure) dont je me ſuis ſervi dans mes 2 premieres Analyſes, parcequ'il eſt plus propre, par ſa ſimplicité, à faire comprendre la methode dont je me ſers, & toutes les proprietés qui en dérivent.

1. Soit donc toujours *Z* ſon centre, *VN*, *CD*, 2 diametres paralleles aux côtés *FH*, *MW*; *FM*, *HW*; *A*, un point quelconque par lequel le rectangle ſoit pouſſé; en ſorte que *QAP* ſoit le plan de la voile, lequel étant prolongé rencontre *CD* (prolongée auſſi, s'il eſt neceſſaire) en *E*. Soit *GAT*, la ligne ſelon laquelle le vent *iP*, *GA*, *bQ* ſouffle contre la voile *QP*, rencontrant *CD* en *G*. Soit *IAK* la route fixe que le rectangle doit tenir,

du point *K* de laquelle menant la perpendiculaire *KT* ſur *GAT*; & *AK* marquant la viteſſe abſolue du rectangle, *AT* exprimera celle dont il fuit ſous le vent. De ſorte que l'excès de la viteſſe abſolue du vent ſelon *GAT* ſur *AT*, ſera ſa viteſſe reſpective à l'égard du rectangle; ainſi il agira ſur *QP* ſelon *GA* ſeulement de cet excès de viteſſe, comme ſi *QAP* étoit immobile; c'eſt à dire que le quarré de cette viteſſe reſpective multiplié par la maſſe du vent, & par la grandeur de la voile *QP*, donnera toute la force abſolue qu'auroit le vent ſelon *GA* contre *QP*, s'il la choquoit en repos, & perpendiculairement. Mais comme il la choque obliquement; menant la perpendiculaire *GR* ſur *QP*, cette force abſolue ſelon *GA* ſe changera dans une force perpendiculaire ſelon *GR*, ou *LAX* ſa parallele, dans le raport du quarré de *GA* au quarré de *GR*. A l'égard de la réſiſtence de l'eau, je conſidere que pendant le premier pas que fait le rectangle ſelon *LAX*, l'eau choque ſes 2 côtés *FM*, *FH*, ſelon des lignes *aF*, *bM*, *cH* paralleles à *LXA*, leſquelles étant obliques à ces mêmes côtés, l'effort qu'elle fait ſur chacun ſe diviſe à l'ordinaire dans un parallele & un perpendiculaire à chacun, dont le dernier pouſſe les faces *FM*, *FH* ſelon les diamétres *VN*, *CD* qui paſſent par leurs centres d'impreſſion *V*, *C*. Ainſi ces deux efforts de l'eau ſelon *VN*, *CD*, ſe coupant en *Z*, on ne peut douter que leur effort compoſé, qui eſt toute la réſiſtance de l'eau, n'ait encore ſa direction paſſant par *Z*, telle que ſoit cette direction. Mais ſi cette même direction paſſe ailleurs que par *A*, il eſt évident que la réſiſtance de l'eau fera tourner le rectangle à l'entour de *A*, comme point fixe. De plus cette réſiſtance jointe à l'effort du vent

ſelon LAX, compoſera une nouvelle route au rectangle differente de AX, mais d'une valeur indéfiniment petite, à cauſe que l'effort du vent ſelon LAX ſurpaſſe encore infiniment la réſiſtance de l'eau en XAL. L'eau venant donc encore ſelon cette nouvelle route tomber ſur FM, FH, fera une nouvelle réſiſtance par Z, laquelle ne paſſant pas encore par A, continuera de faire tourner le rectangle autour de A, & compoſera avec l'effort du vent dans AX une 3e route au point A infiniment proche de la 2e, & ainſi de ſuite, ce qui fera décrire à ce point A une courbe en circulant, juſqu'à ce que la ligne de réſiſtance de l'eau paſſe par Z & A, ſçavoir AZ; alors le Vaiſſeau ceſſera de pyroueter. Mais je dis plus, il ceſſera alors de décrire une ligne courbe, pour embraſſer une ligne droite, qui en ſera la continuation, ou ſa derniere tangente. Car s'il ſe dévoyoit le moins du monde de la droite infiniment petite qu'il a décrite quand la ligne de réſiſtance de l'eau eſt venue à tomber en A; dans le moment même cette ligne de reſiſtance tomberoit hors A, & le Vaiſſeau recommenceroit à piroüeter autour de A. J'ajoute encore qu'alors le Vaiſſeau ceſſe ſon accéleration; car s'il accéleroit encore, l'eau lui faiſant alors plus de réſiſtance, & le vent moins qu'auparavant, ces 2 forces enſemble lui compoſeroient une nouvelle route, ce qui l'obligeroit de recommencer à circuler autour de A. Ajoutez à tout cela, que quand le Vaiſſeau a fini ſon accéleration, il avance directement en vertu de ſa viteſſe acquiſe, ſans que le vent le pouſſe davantage, le vent ne faiſant alors que détruire tous les nouveaux efforts, que l'eau fait pour l'arrêter; or cette deſtruction parfaite ne peut ſe faire, à moins que la ligne d'impreſſion du vent, & celle de ré-

ſiſtance de l'eau ne ſoient confondues en une ſeule perpétuellement, ce qui ne peut arriver, à moins que le Vaiſſeau ne ſoit tranquille. C'eſt cette deſtruction perpétuelle de réſiſtance dans les mouvemens uniformes que j'ai nommée équilibre de viteſſe dans mes Elemens de Méchanique & de Phyſique, 4e Partie, chap. 1.

On prouve encore la même réunion par réduction à l'impoſſible, par les proprietés des efforts relatifs en cette maniere : Suppoſés que AX repréſentant l'effort du vent perpendiculaire à QP, on mene la perpendiculaire XY, à IAK, pour diviſer cet effort dans les 2 AY, YX; & que AZ repréſentant en même temps la réſiſtance de l'eau en AZ, on mene la perpendiculaire ZS ſur la même IAK, pour diviſer cette réſiſtance dans les 2 AS, SZ; & cela afin d'égaler l'effort YX du vent à la réſiſtance SZ de l'eau; & l'effort AY du premier à la réſiſtance AS de l'eau; je dis que de ces 2 équilibres il s'enſuit que AZ & AX ne ſont qu'une même ligne droite; car on tire de là ces analogies : comme l'effort YX eſt à ſon égal SZ; ainſi l'effort AY à ſon égal AS, ou comme l'effort YX à l'effort AY (c'eſt à dire comme YX à AY), ainſi l'effort SZ à l'effort AS, ou ainſi SZ à AS. Or de cette analogie ($YX \mid AY \,||\, SZ \mid AS$) il ſuit évidemment que les droites AX, AZ, n'en font qu'une ſeule, & que la 2e methode que j'ai propoſée dans la 2e Edition de mes Eſſais, retombe dans la premiere, & n'en fait qu'une même avec elle.

On trouvera encore une 3e preuve de cette réunion à la fin de l'article 2.

Ceci étant une fois établi, il ne reſte plus que de ſuppléer ce que j'ai négligé dans la premiere methode, qui eſt de faire tomber le vent ſur la

voile ſelon une direction quelconque *GA*. Soit pour cet effet $FM = c$; $FH = d$, & menant la perpendiculaire *AB* ſur *CD*; ſoit $AB = a$, $BZ = b$, $AZ = e$, $BE = t$, $= \frac{a^2}{b}$ à cauſe de l'angle droit *EAZ*; $AE = z = \frac{a^2}{b}$, $PQ = l$; ſoit *m*, la maſſe du vent, *V* ſa viteſſe, *M* la maſſe de l'eau, *u* la viteſſe du rectangle, qui eſt auſſi la viteſſe réciproque de l'eau; $BI = x$ partie de *CD*, & $BG = y$. *AI*, *AB*, *BI*, étant paralleles à *KA*, *FH*, *FM*; & *AI* repréſentant la viteſſe abſolue de l'eau ſelon *KA*, & en même tems le ſinus total; *AB*, *BI*, repréſenteront ſes viteſſes relatives à l'égard de *FM*, *FH*, & en même tems le ſinus de ſes inclinaiſons ſur ces mêmes faces. Mais l'effort relatif de l'eau venant ſelon *KA* contre *FM*, eſt à ſon effort abſolu contre la même *FM*, comme le quarré de *AB* eſt au quarré de *AI*, & ſon effort abſolu contre *FM* eſt à ſon effort abſolu contre *FH* comme *FM* à *FH*, & enfin ſon effort abſolu contre *FH* à ſon relatif contre la même *FH*, comme le quarré de *AI* au quarré de *BI*. Donc du premier au dernier; ſon effort relatif contre *FM* eſt à ſon relatif contre *FH*, comme $AB^2 \times FM$ à $BI^2 \times FH$, c'eſt à dire comme les quarrés de ſes 2 viteſſes relatives contre *FM*, *FH*, multipliés l'un par *FM*, l'autre par *FH*, de même que dans les efforts abſolus. Or puiſque *AZ* eſt la ligne de réſiſtance de l'eau, il eſt évident que ſi on la prend pour marquer cette réſiſtance, *AB* repréſentera la réſiſtance de l'eau contre *FM*, & *BZ* contre *FH*, ce qui donnera l'analogie $(a^2c \mid x^2d \parallel a \mid b)$ & l'égalité $(\frac{a^2b}{d} = x^2)$, d'où l'on tire $x = BI = \sqrt{\frac{a^2cb}{d}}$ $= q$, comme nous l'avons trouvée dans nos deux

1res analyſes ; mais cette voye eſt incomparablement plus ſimple. On en tire $AI = \sqrt{AB^2 + BI^2} = \sqrt{ad + cb \times \frac{a}{d}}$).

Nommant donc préſentement pour abreger $\sqrt{\frac{acb}{d}}, q$. & menant la perpendiculaire $I\mathcal{J}$ ſur AG prolongée, s'il eſt neceſſaire : les triangles rectangles ſemblables ABG, $IG\mathcal{J}$ donneront l'analogie ($AG = \sqrt{a^2 + y^2}$ (à cauſe de l'angle droit ABG) $BG = y \,||\, IG = q \mp y \,|\, G\mathcal{J} = \frac{qy \mp y^2}{\sqrt{a^2 + y^2}}$), on aura ($A\mathcal{J} = \frac{a^2 \mp qy}{\sqrt{a^2 + y^2}}$). De plus les triangles rectangles ſemblables KAT, $IA\mathcal{J}$, donneront l'analogie ($AK \,|\, AT \,||\, AI \,|\, A\mathcal{J}$). Faiſant donc l'analogie ($AI = \sqrt{a^2 + q^2}$ (à cauſe de l'angle droit ABI) $= b \,|\, A\mathcal{J} = \frac{a^2 \mp qy}{\sqrt{a^2 + y^2}} \,||\, u \,|\, \frac{u}{b} \times \frac{a^2 \mp qy}{\sqrt{a^2 + y^2}}$), on aura la viteſſe dont le bateau fuit ſous le vent. Ainſi la viteſſe reſpective du vent à ſon égard ſera $\left(y - \frac{u}{b} \times \frac{a^2 \mp qy}{\sqrt{a^2 + y^2}} = \left(\frac{Vb\sqrt{a^2 + y^2} \mp ua \mp quy}{b\sqrt{a^2 + y^2}}\right)\right.$, dont le quarré étant par conſequent multiplié par (ml), donnera la force qu'il auroit contre la voile PQ, ſi allant de la viteſſe (V) ſelon AG, il la choquoit à plomb. Mais les triangles ſemblables rectangles ABZ GER, donnent l'analogie ($AZ = c \,|\, ZB = b \,||\, GE = \mp y + t = \mp \frac{by + a^2}{b} \,|\, GR = \mp \frac{by + a^2}{c}$) ; d'où l'on tire cette autre, (comme $AG^2 = a^2 + y^2 \,|\, GR^2 = \mp \frac{by + a^2}{c^2}$ || ainſi la force du vent en $GA = \frac{Vb\sqrt{a^2 + y^2} \mp ua \mp quy}{b^2 \times a^2 + y^2}^2 \times lm \,|\, \frac{Vb\sqrt{a^2 + y^2} \mp ua \mp quy}{a^2 + y^2}^2 \times \mp by + a^2 \times ml$) qui ſera

la force relative du vent contre PQ selon GR ou LAX sa parallele.

A l'égard de la résistance de l'eau en AZ, on considerera que son effort perpendiculaire contre FM, avec sa vitesse réciproque (u), seroit (u^2cM), lequel est à son effort relatif à FM, comme le quarré de $AI = h^2$, est au quarré de $AB = a^2$, ce qui donne $\left(\frac{u^2a^2cM}{h^2}\right)$, pour cet effort relatif selon AB. Or ce dernier est à la résistance absolue de l'eau en AZ, comme $AB = a$ est à $AZ = e$, ce qui donne $\left(\frac{u^2aceM}{h^2}\right)$ pour cette résistance absolue, laquelle étant égalée à l'effort contraire du vent selon AX, ci-dessus, & tirant les racines quarrées de part & d'autre, il vient $\left(eu\sqrt{\frac{ceMa}{ml}} = \frac{\overline{Vh\sqrt{a^2+y^2} \mp ua^2 \mp quy} \times \pm \overline{by + a^2}}{a^2+y^2}\right) = \frac{\overline{V \times h \mp uAJ} \times bGE}{AB}$), d'où l'on tire ($VhbBG = \pm \overline{AJbGE + e\sqrt{\frac{ceaM}{ml}} \times AG} \times u$, & $\left(u = \frac{V \times bGE \times AI}{\pm \overline{AJ \times GE \times b + AG \times e\sqrt{\frac{ceaM}{ml}}}}\right) = \frac{V \times bGE\sqrt{ml} \times AI}{AJ \times GE \times b\sqrt{ml} + AGe\sqrt{ceaM}}$) qui se réduit à $\frac{Vh\overline{ml}}{AJ\sqrt{ml} + \sqrt{Macc}} = u$), lorsque G tombe en Z, ou AG sur AZ, comme dans notre premiere analyse; à cause qu'alors AJ est ici la ligne qui là a été nommée g, & qu'alors $AG \times e = AG \times AG = AZ^2 = BZ \times ZE = b \times GE$).

Je ne m'arrête point à tirer les differentes conſequences que l'on auroit, ſi le point *A* étoit pris ou ſur une diagonale, ou ſur un des diametres, ou en *Z*; ou ſi le Vaiſſeau étoit quarré, ceci ayant été déja fait dans ma premiere analyſe; & d'ailleurs la choſe n'en meritant pas la peine, puiſqu'on n'employe dans l'uſage de la navigation aucune figure terminée par des plans.

Nous ferons ſeulement remarquer que de quelque figure que ſoit le Vaiſſeau, lorſque le vent vient à augmenter ou diminuer ſucceſſivement, le Vaiſſeau change alors de route, & décrit même une courbe en pirouettant autour de *A*, à cauſe que l'équilibre entre le vent & l'eau eſt rompu par ce moyen; car il eſt bien évident que ſi le vent ceſſoit tout à coup, l'eau feroit alors avancer le Vaiſſeau ſelon ſa réſiſtance *AZ*, ainſi il auroit 2 mouvemens; celui-ci & ſa viteſſe d'accéleration ſelon *AK*, qui lui feroient embraſſer conjointement une nouvelle route entre *AK* & *AZ*; & l'eau choquant ſelon cette nouvelle route ne réſiſteroit plus ſelon *AZ*, mais ſelon quelqu'autre ligne qui ne paſſeroit plus par *A*. Si au contraire le vent augmentoit tout à coup conſiderablement, le Vaiſſeau prendroit alors auſſi de la viteſſe ſelon *AX*, laquelle avec celle qu'il a déja en lui, lui feroient embraſſer une route entre *AX* & *AK*; mais lorſque le vent augmenté ou diminué ſera devenu uniforme, le Vaiſſeau reprendra toujours ſa premiere ſituation & route, & il n'y aura que ſa viteſſe de changée.

A l'égard des differentes viteſſes uniformes auſquelles le rectangle peut arriver étant pouſſé par differentes viteſſes de vent, le reſte demeurant le même, il eſt aiſé de voir, qu'elles ont même raport entr'elles que le viteſſes *V* du vent; la fraction qui

multiplie V étant alors constante. Mais si BG ou AG augmentent successivement jusqu'à BZ, le reste demeurant le même, il paroîtra un paradoxe, sçavoir que la vitesse u du Vaisseau diminuëra à mesure que le vent frappera sa voile plus à plomb ; car si le second terme du diviseur de la valeur de u, sçavoir ($AGe\sqrt{ceaM}$) étoit ($GEe\sqrt{ceaM}$), il est évident que les GE se détruiroient dans cette valeur, qui demeureroit par consequent la même. Mais les AG croissant en plus grande raison que les GE ou GB, par la nature des secantes & des tangentes, le diviseur de cette valeur de u croîtra en plus grande proportion que son dividende ; donc u diminuera continuellemement : ce sera la même chose quand AG se trouvera entre B & E, & ira en augmentant.

Voici encore un second paradoxe, c'est qu'à proportion que le terme $\sqrt{ml}$ (ou la force du vent) augmentera, le reste demeurant le même, la vitesse du rectangle croîtra de même, jusqu'à devenir plus grande même que celle du vent, dans le rapport de AI à AJ, ou de AK à AT : comme il est aisé de le tirer de la valeur de u, en supposant ($\sqrt{ml}$) infinie. Ce qui ne doit pas cependant plus surprendre, que si quelqu'un poussant un coin AFO, 3e figure, avec la vitesse & selon la direction GAT, avec quelque corps solide IFG, & le faisant ainsi glisser le long du plan solide & poli OAK obligeoit ce coin de parcourir AK égale à sa base AO, quoique AG ne fût qu'égale à AT terminée par la perpendiculaire KT sur GAT.

Experiences qui confirment la theorie précedente.

2. Ceux qui auroient de la peine à s'imaginer la ligne AZ de la réſiſtance de l'eau, n'ont qu'à faire attacher un bateau $FMWH$ (4e figure) par un de ſes points quelconques A pris hors des diametres CD, VN, à quelque point fixe $Æ$ par une corde $AÆ$ dans le courant d'une riviere, ſans gouvernail, ou avec un gouvernail fixe De; & ils verront que l'eau fixera ce bateau dans une ſituation oblique à ſon cours KA, & à la corde $AÆ$, laquelle ſera elle-même alors oblique à ce même cours, & marquera par ſa direction la ligne de réſiſtance $ÆAZ$ de l'eau. De ſorte que ſi le bateau étoit de figure rectangulaire, comme une boëte, on verroit qu'en prolongeant la ligne $AÆ$ du côté de A, elle paſſeroit par le centre Z de ce rectangle, le gouvernail étant ôté.

A l'égard des équilibres de viteſſe on en a un exemple ſenſible & démonſtratif, lorſqu'on met au fil de l'eau deux bateaux f, k (5e figure) dont l'un eſt plus grand que l'autre, & tous deux attachez en b & g à une même corde big, laquelle paſſe pardeſſus une poulie, i, fixe dans le courant de l'eau au deſſus des bateaux. Car on voit que le plus grand f deſcendant, fait remonter le plus petit k, d'abord avec accélération; & qu'enfin cette accélération ſe termine à une viteſſe uniforme & conſtante moindre que celle de l'eau, que j'ai nommée à cauſe de cela viteſſe d'équilibre. M. le Chevalier Renau reconnoît cette viteſſe d'équilibre dans le Memoire qu'il a fait imprimer ſur la manœuvre des Vaiſſeaux, & M. Bernoulli l'aîné en a eu l'idée, & la déterminée dans

les Actes de Leipſeik de l'année 1695, pag. 540 & 550 : M. Bernoulli ſon frere en convient auſſi tacitement dans ſon Eſſai de manœuvre chap. 15 art. 12.

Au reſte il faut bien remarquer que quand la ligne de réſiſtance de l'eau & la longueur de la corde ne font qu'une même ligne (4e figure) ſi l'on tire le bateau ſelon la corde *AÆf* qu'on ſuppoſe préſentement fort longue, le bateau ne ſuit ni la direction *AÆf*, ni ne remonte contre le cours de l'eau *KA*; mais il prend une route moyenne *AOE* entre les deux, comme on le remarque tous les jours dans les bateaux qu'on tire à bord en avançant dans la campagne, toujours ſur une même ligne *AÆ*, dont on verra la raiſon ci-après. Où l'on peut remarquer l'erreur du ſçavant M. Bernoulli le jeune dans ſon Eſſai de manœuvre imprimé en 1714 (chap. 2. art. 2.) lorſqu'il conclut, de ce qu'un Vaiſſeau étant retenu en repos par quelque puiſſance, comme ſelon la direction *AÆ*, dans une eau coulante ſelon *KA*, la ligne de réſiſtance de l'eau *HZ* tombe dans *AÆ*; que quand cette force motrice le fera avancer, il ira par *AK*. Outre qu'il s'enſuivroit de-là une abſurdité, ſçavoir que par quelque point *A* que l'on tirât un bateau ſur une riviere, & par quelque direction fixe *AÆ* que ſe fiſt cette traction, le Vaiſſeau remonteroit toujours contre le courant de l'eau, au lieu d'arriver au bord de l'eau, qui eſt du côté de la force motrice *AÆ*.

Auſſi les deux raiſons que j'apporte dans le ſecond tome de la premiere édition de mes Recherches pages 745 & 747, pour déterminer la route *AK* (2e figure) different eſſentiellement de celle de M. Bernoulli. La premiere de ces deux raiſons eſt la même que la 1re des deux que j'ai données au

commencement du 1er art. ci-deſſus page 4 ; ainſi il ſeroit inutile de la répeter ici. La 2e, & qui ſervira ſi l'on veut de 3e preuve, eſt [Que la ſituation de la ſurface & ſa route ne deviennent conſtantes, que lorſqu'à force de varier elles ſont arrivées à tel point, qu'il ne ſe compoſe plus de la force motrice & de la réſiſtance du liquide aucune nouvelle route] ni par conſequent aucun nouvel effort ſur le Vaiſſeau, ce qui fait voir que j'enviſageois dès-lors le Vaiſſeau dans cet état d'uniformité, comme avançant ſelon *AK*, en vertu de ſa ſeule accélération acquiſe par les efforts du vent ſur lui, & levent comme ne faiſant plus qu'aneantir perpetuellement les nouvelles réſiſtances que l'eau lui fait dans leur ligne commune *ZAX*, ou même ſi l'on veut encore dans *IAK*, comme je les prends à la page 746.

Application des principes précedens à la conduite d'un Vaiſſeau.

3. Pour réduire maintenant nos principes à la pratique, je ſuppoſe un Vaiſſeau tout fabriqué *QLDM* (figure 6.) de quelque figure que ce ſoit, dont *QD* ſoit la quille, *DG* le gouvernail ; *TZ*, *TW*, &c. les voiles plantées ſur la quille en *Æ*, *X*, &c. parallelement entr'elles. Il eſt donc évident, premierement, que le vent ſoufflant parallelement ſelon *AOB* ſur chacune, & leurs figures étant de même nature, ſes differentes lignes d'impreſſion ſeront des paralleles paſſantes par *Æ*, *X*, &c. c'eſt pourquoi ſi l'on prend ſur *QD* le centre de gravité *O*, de toutes ces voiles *TZ*, *TW*, &c. la ligne d'impreſſion totale du vent paſſera par *O*, comme ſi toutes les voiles étoient réunies dans une ſeule *VF* plantée en *O* égale & parallele à tou-

tes les autres. De plus la ſituation du gouvernail *DG* étant fixe avec *QD*, le Vaiſſeau fixera ſa ſituation, & prendra une telle route conſtante *OE* à l'égard de *AOB*, que la ligne de réſiſtance de toute l'eau qu'il rencontrera ſelon *EO* (entre les tangentes *LN*, *MK* à ſon circuit en *L* & *M*, paralleles à *OE*) paſſera par *O*, comme *OR*, & tombera ſur la perpendiculaire *OP* à la voile *VF*, qui eſt la ligne d'impreſſion du vent, le tout comme on l'a démontré dans le premier article. Mais comme la nature de la courbure du Vaiſſeau eſt inconnue, il n'eſt pas poſſible de connoître le rapport des angles *EOQ*, *ROD*, ni par conſequent celui de la réſiſtance de l'eau contre le contour *LQM* ſelon *OR*, par rapport à ſon effort direct contre une ſurface plate de grandeur donnée, comme d'un pied en quarré, ou par rapport à l'effort du vent ſur la voile *VF* avec une viteſſe quelconque. Et quand même on ſuppoſeroit une figure connue, comme cylindrique, telle que celle que M. Bernoulli le jeune ſuppoſe, il arriveroit toujours, que les calculs de ces angles & de ces réſiſtances ſeroient de beaucoup trop compoſés pour des Pilotes, comme il l'a très bien remarqué : encore cette figure, toute ſimple qu'elle eſt, n'a pas les qualités que la Manœuvre demande, ſçavoir d'être courbée & même tranchante par deſſous, & d'être en même temps la moins réſiſtante en tout ſens. Peut-être que la figure d'une lentille fort obtuſe dans ſon arête, *figure 9.* dont on ne prendroit qu'une très petite portion retranchée par un plan *abc* perpendiculaire au plan de l'arête *afd*, ſatisferoit à ces 2 conditions, ce qui réduiroit la queſtion, ſur la figure du Vaiſſeau, à trouver la réſiſtance d'un triangle ſphérique formé de deux arcs de petit cercle, & d'un arc de grand cercle perpendicu-

laire à l'un des deux, lequel ſeroit mû dans l'eau parallelement à l'axe de ce dernier ; mais le calcul de cette figure étant encore beaucoup plus compoſé que celui de la figure cylindrique propoſée par M. Bernoulli ; il faudroit toujours en venir à compoſer des tables, où ces angles & ces réſiſtances fuſſent marquées. Or avant d'entreprendre un tel travail, il eſt à propos de voir ſi une telle figure ſeroit reçue par les Marins ; c'eſt pourquoi en attendant leur déciſion, je reviens à la pratique.

Pour avoir donc le rapport des angles *EOQ*, *ROD*, & la réſiſtance en *OR* pour toute ſorte de figures données, on tendra une corde de *Q*. à *D*, & attachant une 2e corde *OP* en *O*, on fera paſſer ſon autre extremité *P* par deſſus une poulie *P* fixe dans un autre bateau à l'ancre en *P*, & l'on y attachera un poids ſuffiſant pour retenir le Vaiſſeau en repos, & l'angle *QDG* étant fixe, le Vaiſſeau *QLDM* prendra une ſituation telle, que la corde même *OP* marquera la ligne de réſiſtance *OR* de l'eau, comme dans le ſecond article ; c'eſt pourquoi on meſurera l'angle *QOP* égal à *ROD* deſiré, & l'on aura en même temps la quantité de la réſiſtance de l'eau en *OR* ; il ne reſtera donc que de meſurer la viteſſe de l'eau ſelon *EO*, & l'angle *EOQ* ; or pour meſurer cet angle, il ne faudra qu'attacher un batelet par ſon extremité à une 3e corde *PF* retenue fixement en *P*, & le lâcher à l'eau, pour meſurer l'angle *FPO* de *PO*, & de cette 3e corde qui ſera parallele à *EO*, ce qui donnera l'angle *PEO*, lequel étant ôté de *PEQ*, donnera auſſi-tôt l'angle *EOQ* détiré ; & répétant cette operation pour toutes les differentes ſituations du gouvernail *DG*, du moins de 5 degrés en 5 degrés, on en compoſera une table qui

ſervira dans la ſuite à réſoudre aiſément les Problêmes de la Manœuvre pour une telle figure de Vaiſſeau, & plus utilement que par les calculs geometriques les plus exacts; d'autant plus que la dépenſe de ces experiences ne peut point entrer en comparaiſon avec celle de la conſtruction d'un Vaiſſeau (qui va quelquefois à $\frac{1}{2}$ million) ni la peine & le tems de les faire, avec ce qu'il en faudroit employer pour venir à bout de ces calculs.

Suppoſant donc ces experiences faites avec exactitude, il ne reſte que de trouver les differentes viteſſes que le Vaiſſeau prendra dans toutes ſes differentes dérives OE, pour toutes les directions poſſibles AOB du vent. Pour cet effet ayant mené la droite CQP perpendiculaire à QD, rencontrant la voile VF prolongée en C, la route du Vaiſſeau en E, celle du vent en B, & ſa ligne d'impreſſion OP perpendiculaire à VF en P; on nommera OQ, q; QE, a; QB, y; QP, b; VF, V; la maſſe du vent m, ſa viteſſe u, la viteſſe du Vaiſſeau x, la viteſſe d'experience de l'eau v, & ſa réſiſtance en OR, R. Or menant les perpendiculaires EI ſur OB, avec BH ſur OC, laquelle ſera parallele à OP, les triangles rectangles ſemblables OQB, BIE donneront l'analogie : $OB = \sqrt{y^2 + q^2}$ (à cauſe de l'angle droit BQO) | $BQ = y$ || $BE = y - a$ | $BI = \frac{y^2 - ay}{\sqrt{b^2 + q^2}}$; d'où l'on tire $OI = \sqrt{y^2 + q^2} - \frac{y^2 + ay}{\sqrt{b^2 + q^2}} = \frac{q^2 + ay}{\sqrt{b^2 + q^2}} = \frac{f^2}{e}$) en prenant $q^2 + ay = f^2$, & ($\sqrt{y^2 + q^2} = e$). Si l'on fait donc l'analogie : comme $OE = \sqrt{a^2 + q^2} = d$ (à cauſe de l'angle droit OQE) eſt à $OI = \frac{f^2}{e}$; ainſi la viteſſe x du Vaiſſeau ſelon OE a un 4e ter-

me, on aura $(\frac{f^2x}{de})$, pour la viteſſe dont le Vaiſſeau fuit ſous le vent ſelon OB. Ainſi la viteſſe reſpective du vent à ſon égard ſelon la même OB ſera $u - \frac{f^2x}{de} = (\frac{ude - f^2x}{de})$. Et pour avoir ſa force uſuelle en ce même ſens OB, on fera cette regle de proportion compoſée : (ſi un pied quarré de viteſſe d'eau, & un pied quarré de baſe, avec M de maſſe, ſoutiennent directement 45 demi onces : (Cette experience eſt moyenne entre toutes celles qui ont été faites par Galilée, M. Mariotte, & le Pere Sebaſtien Carme) combien par proportion $(\frac{\overline{ude - f^2x}^2}{d^2e^2})$ de viteſſe de vent en piés par ſeconde, auec V de baſe en piés quarrés, & m de maſſe, doivent-ils ſoutenir directement) ? Il viendra pour réponſe $(45Vm \times \frac{\overline{ude - f^2x}^2}{Md^2e^2})$. Faiſant donc maintenant l'analogie (à cauſe des paralleles OP, BH, & de l'angle droit POC qui donne $QC = \frac{q^2}{b}$) : ($PC = b + \frac{q^2}{b} = \frac{b^2+q^2}{b} = \frac{g^2}{b}$ | $BC = y + \frac{q^2}{b} = \frac{by+q^2}{b} = \frac{s^2}{b}$ || $OP = g$ | $BH = \frac{s^2}{g}$) & $OB = e$ | $BH = \frac{s^2}{g}$ || $\frac{45Vm}{Md^2e^2} \times \overline{ude - f^2x}^2$ | à un 4e terme $(\frac{45s^2Vm}{Md^2e^2g} \times \overline{ude - f^2x}^2)$, on aura la force du vent ſelon HB ou ROP en demi onces ; u & x étant des pieds par ſecondes.

A l'égard de la réſiſtance de l'eau en ce même ſens OR, on fera l'analogie ordinaire : comme le quarré (v^2) de la viteſſe d'experience en piés par ſecondes, eſt au quarré (x^2) de ſa viteſſe réciproque actuelle en EO priſe de même ; ainſi le poids R en demi onces ſoutenu dans l'experience

ſelon

selon OR, à sa résistance actuelle dans la même OR, sçavoir $\left(\frac{x^2R}{v^2}\right)$ en demi ondes. Egalant donc maintenant ces deux efforts en POR, il vient l'équation $(45s^2Vmv^2 \times \overline{ude - f^2x^2} = x^2RMd^2e^3g)$, & $(3es\sqrt{sVM} \times \overline{ude - f^2x^2} = xde\sqrt{RMeg} = 3svuds\sqrt{sVM} - 3svf^2x\sqrt{sVM})$, d'où l'on tire $(de\sqrt{RMeg} + 3svf^2\sqrt{sVm} \times x = 3svude\sqrt{Vm})$, & enfin $\left(x = \frac{3svude\sqrt{sVm}}{de\sqrt{RMeg} + 3svf^2\sqrt{sVm}} = \frac{3svude\sqrt{sVm}}{de^2\sqrt{RM} + 3s^3v\sqrt{sVm}}\right)$ lorsque le vent sera perpendiculaire à la voile, parcequ'alors y étant $= b$, g est $= e$, & $f = s$, comme on le voit par le calcul ci-dessus, & cette valeur d'x sont des piés par seconde, de même que u & v; Ayant donc calculé toutes ces differentes viteſſes du Vaisseau proposé par les mêmes angles QDG que ci-dessus, en supposant le vent toujours perpendiculaire à VF; & avec une même viteſſe fixe, comme de 24 piés pour seconde, qui est la plus grande que les voiles puissent souffrir, on les ajoûtera aux résistances R, qui conviennent aux mêmes angles, ce qui fera connoître tout d'un coup à quel angle QDG appartient la plus grande viteſſe du Vaisseau en OE pour une viteſſe quelconque du vent perpendiculaire à la voile.

A l'égard de trouver la viteſſe du Vaisseau en OE, lorsque la viteſſe perpendiculaire du vent sera differente de 24 piés par seconde; on a vû ci-devant, qu'il n'y aura qu'une regle de proportion simple à faire; sçavoir (comme 24 piés par seconde sont à la viteſſe du Vaisseau dans la table; ainsi la viteſſe du vent propoſée à celle que recevra le Vaisseau par cette derniere.

Enfin pour avoir la plus grande viteſſe abſolue par raport à une direction de vent quelconque. Ayant pris une dérive conſtante *OE*, ou les angles conſtans *EOQ*, *POQ*, *QOC*, on laiſſera varier *QB* ou *y* dans la valeur de (*u*) ci-deſſus ; c'eſt à dire, on ſupoſera *QB* moindre que *QP* à ſouhait, & même le point *E* entre *Q* & *C*, de *Q* juſqu'à *C*, enſuite *QB* plus grande à ſouhait que *QP*, ce qui donnera differens angles *BOQ*, d'où l'on tirera autant d'angles *BOE* qu'il faut prendre differens les uns des autres de cinq degrez en cinq degrez, & avec les differentes valeurs de *QB*, qui répondent à chacun de ces angles ; on calculera autant de valeurs (*u*) que l'on ajoûtera à la dérive choiſie *EOQ*. Par ce moyen on trouvera la plus grande viteſſe déſirée.

On ajoûtera encore à chacune de toutes ces viteſſes ce que le Vaiſſeau fait dans la ligne du vent *OB*, qui ſont toutes les valeurs de *OI*, qui ſe trouveront par cette ſimple regle de proportion : ſi le ſinus total *OE* donne le ſinus *OI* du complément de l'angle connu *EOB* ; que donnera la viteſſe du Vaiſſeau en *OE* ? il viendra la quantité dont le Vaiſſeau gagne au vent ou fuit ſous le vent.

Au reſte le Vaiſſeau faiſant ordinairement trois lieues par heure, quand le vent fait 24 piés par ſeconde, ou cinq lieues par heure, il eſt manifeſte que le raport de la viteſſe du vent à celle du Vaiſſeau eſt infiniment éloigné d'être infini, comme M. Bernoulli le jeune l'a cru dans le Traité cité. Ainſi toute ſa theorie étant fondée ſur cette fiction, il eſt manifeſte qu'elle ne peut être d'aucun uſage dans la Manœuvre. Mais quoique cet ouvrage ſoit appuyé ſur une fauſſe conſequence, comme on l'a fait voir ci-devant ; & ſur une ſupo-

ſition auſſi fauſſe, il ne laiſſera pas de plaire à quantité de Geometres qui ne cherchent ordinairement dans ces ſortes de Problêmes qu'une Géometrie rafinée. C'eſt pour ces Meſſieurs principalement que nous ajoûterons ici nos Réflexions ſur la réſiſtance de quelques figures mûes dans l'eau.

II. PROBLÊME.

Sur les réſiſtances des figures mûes dans l'eau.

1. Sur les figures de la plus petite réſiſtance poſſible ; ou ſuplément pour le ſolide indiqué par M. Neuton, premiere Edition de ſes Principes, & conſtruit par Meſſieurs Fatio, & M. de l'Hôpital, appellé par les Marins Navire à plate-varangues.

1. SOIT une ligne courbe *AFCD*, dont une des parties quelconques *AFC* compriſe entre les points *A* & *C*, ayant tourné autour de l'axe *SV* immobile, & ſitué dans ſon plan, ait engendré la ſurface d'un conoïde *AIaCHc* tel que s'il eſt pouſſé ſelon ſon axe *VS* dans un fluide parfaitement liquide, il en ſouffre moins de réſiſtance, que tout autre ſolide formé de même, ayant les mêmes baſes & le même axe, & étant pouſſé de même, avec la même viteſſe. M. Neuton a indiqué la nature de ce Canot, page 327 de ſes Principes, premiere Edition, ſans en donner l'analyſe. M. Fatio en donne une conſtruction à la fin de ſon Traité des Murs inclinés à l'horiſon,

& M. le Marquis de l'Hôpital dans nos Memoires de 1699 en donne une autre beaucoup plus ſimple, & à laquelle par conſequent je m'arrêterai.

Pour conſtruire donc le ſolide propoſé, ayant pris d'abord une quantité conſtante (a) à volonté, & une variable (s) auſſi à ſouhait; il en forme les ordonnées AS, TF, VC du profil ($AFC = \frac{\overline{a^2+s^2}^2}{4a^2s}$) & égalant cette valeur à un (*minimum*), il en tire une valeur de ($s = \sqrt[4]{3}$), qui lui donne la valeur de la moindre ordonnée ($AS = \frac{4a}{3\sqrt{3}}$). De ſorte que le point A eſt alors l'origine de la courbe AFC. Enſuite avec cette moindre valeur de s, & une des premieres ci-deſſus, il forme le terme ($S\frac{ads}{4s}$), S marquant une integrale, avec laquelle il compoſe l'abciſſe (ST ou $SV = \frac{s^2}{4a} + \frac{3s^4}{16a^3} - \frac{5a}{48} - S\frac{ads}{4s} = x$), & ces valeurs de AS; ou de ST & de TF; ou de SV, & de VC, lui donnent les points A, F & C; & de même pour tous les autres.

De là il conclut que ce ſolide a une baſe du côté de s, qui eſt la moindre qu'il ſe puiſſe, lorſque ſon rayon eſt ($As = \frac{4a}{3\sqrt{3}}$), & autres proprietés qui ne regardent que la Geometrie.

Mais pour la réſiſtance de ce ſolide, il n'en parle point, non plus que M. Neuton (je ne ſçai point ſi M. Fatio l'a donnée.) Je tâcherai de ſupléer ici à cette condition auſſi eſſentielle au Problême en queſtion, que ſa conſtruction même, puiſque ſans elle on ne peut avoir ſa viteſſe. Pour cet effet je prens après M. le Marquis de l'Hopital ($dx = \frac{sdy}{a}$), ce qui me donne ($\frac{adx}{s} = dy$), que je ſubſtitue dans la formule generale de la réſiſtance des figures tournées de l'art. 2 de ce 2e Problê-

me ci-après, ſçavoir $(\frac{cy}{r} \times \frac{dy^3}{dx^2+dy^2})$ en mettant dans cette valeur de (dy) la valeur de dx en ds, de cet Auteur, ſçavoir $(\frac{sds}{2a} + \frac{3s^3ds}{4a^3} - \frac{ads}{4s})$, & auſſi la valeur de (y) en s, ſçavoir $(\frac{a^2+s^2}{4a^2s})^2$ ci-deſſus, ce qui change cette réſiſtance en cette forme $(\frac{a^2ds}{s} + 5sds + \frac{3s^3ds}{a^2} - \frac{a^4ds}{s^3} \times \frac{c}{16r})$, dont la ſomme infinie $=$

$(\frac{5}{2}s^2 + \frac{3s^4}{4a^2} + 4aS\frac{ads}{4s} + \frac{a^4}{2s^2} - \frac{29}{12}a^2 \times \frac{c}{16r})$, où l'on eſt obligé d'ajoûter le terme conſtant $(\frac{29}{12}a^2 \times \frac{c}{16r})$, afin que quand (ſelon cet Auteur) le terme $(S\frac{ads}{4s}$ ſera $= o)$, ou $(s = \frac{a}{\sqrt{3}})$, ou $(x = o)$, les termes $(\frac{5}{2}s^2 + \frac{3s^4}{4a^2} + \frac{a^4}{2s^2})$ s'évanouiſſent, & qu'alors la réſiſtance du conoïde ſoit $=$ zero, comme elle le doit, en ce que la formule ci-deſſus ne comprend que la réſiſtance de la ſurface courbe engendrée par le profil *AFC*.

Si pour venir à un calcul numerique on ſupoſe la moindre valeur d'$s = \frac{a}{\sqrt{3}} = 10000$ (par exemple) on aura $(a = 10000\sqrt{3} = 17320)$ à fort peu près ; & ſi l'on prend encore une autre valeur d' $(s = 10a = 173200)$, on aura $(y = \frac{a^2+s^2}{4a^2s})^2 = \frac{10201}{40} \times a = 44170\,33 = Vc)$. On aura auſſi $(SV = x = \frac{91195}{48} \times a - S\frac{ads}{4s} = 32906196 - S\frac{ads}{4s})$, & $AS = \frac{4a}{3\sqrt{3}} = 13333$) qui eſt environ $\frac{1}{331}$ de CV; c'eſt à dire inſenſiblement dans la pratique comme elle le doit, puiſqu'il s'enſuit de là que la réſiſtance de la petite baſe *A I a A* du ſolide contre l'eau, n'eſt qu'environ la dix milliéme partie de celle de ſa

grande baſe $C\,H\,c\,C$; ce qui étant, il ſeroit fort inutile d'ajoûter ſur cette baſe $A\,I\,a\,A$ un cône, comme fait le R. P. Reyneau.

Et pour trouver la valeur du terme $(S\frac{ads}{4s})$, ou plûtôt de $(\frac{\sqrt{3}}{4}S\frac{ads}{s\sqrt{3}})$, qui eſt le même, on aura pour la moindre valeur de S $(\frac{a}{\sqrt{3}} = 10000)$, & pour la plus grande $(S = 10a = 173200)$, dont les logarithmes ont pour leur difference 1238606. De plus la difference des logarithmes de 10000, & 10001, eſt 435, par laquelle la précedente étant diviſée, il vient au quotient $(28472 = S\frac{ads}{s\sqrt{3}})$, & ce quotient étant multiplié par le coefficient $(\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{433}{1000})$ donne (12329) pour le terme $(\frac{\sqrt{3}}{4}S\frac{ads}{s\sqrt{3}} = S\frac{ads}{4s})$, lequel étant ôté de 32906196 ci-deſſus laiſſé (32893867) pour la valeur d'x ou de SV, dont y ou VC eſt environ $(\frac{2}{15})$, ce qui convient aſſez pour la Marine.

A l'égard de la réſiſtance de la ſurface courbe de ce ſolide, on a $(\sqrt{\frac{3100002}{400} \times a - \frac{29}{1200} \times a^2} \times \frac{c}{16r} + 4aS\frac{ads}{4s}) = (8387210 \times \frac{ac}{r} + 4aS\frac{ads}{4s})$, qui fait en tout $(8395060 \times \frac{ac}{r})$; à quoi il faut ajoûter la réſiſtance de la baſe dont AS eſt rayon, qui eſt exprimée par cette baſe même dans les ſuppoſitions des Auteurs cités : ſçavoir $(\frac{16a^2}{27} \times \frac{c}{2r} = 5132 \times \frac{ac}{r})$, & qui par conſequent n'eſt que $(\frac{1}{1636})$ éme partie de la précedente, ce qui fait $(8400192\frac{ac}{r})$, pour la réſiſtance que ſouffre toute la ſurface du conoïde préſentée au fluide.

Et pour comparer cette réſiſtanee avec celle de ſa grande baſe, dont la valeur eſt $(\frac{c}{2r} \times y^2 = 563226920\frac{ac}{r})$, on a pour le raport de la premiere

à la derniere ($\frac{8400192}{563226920}$), ce qui fait voir que la réſiſtance entiere de ce Navire à plates-varangues, n'eſt qu'environ la 67e partie de celle de ſon plus grand profil perpendiculaire à ſa Quille, après quoi il n'eſt pas difficile de déterminer ſa viteſſe, quand il aura le vent en poupe.

2. A l'égard des autres figures tant planes que conoïdales & ſpheroïdales, outre celles d'un triangle rectiligne quelconque, d'un rectangle, & d'un Rhombe équipé d'un gouvernail qu'on trouve dans la quatriéme Partie de mes Elemens de Méchanique & de Phyſique, chapitre 10, déduites d'une formule generale aux figures planes mûes en tout ſens; dans le ſecond tome de mes Recherches, premiere Edition, & ci-devant, ſi l'on ſuposſe que le profil *CFALAc* ſoit une ſurface plane mûe dans un fluide quelconque ſelon ſon axe *VSL*, cette formule générale, en ſuppoſant ($m = 0$) deviendra la particuliere ($\frac{dy^3}{dx^2+dy^2}$) qui marque l'élément de la réſiſtance de cette même ſurface. Et faiſant l'analogie : comme le rayon (r) d'un cercle quelconque eſt à ſa circonference (c); ainſi l'ordonnée $FT = y$, à un quatriéme terme ($\frac{cy}{r}$), on trouvera le circuit *FNOF*, dont *TF* eſt rayon, par lequel multipliant ($\frac{dy^3}{dx^2+dy^2}$), il vient ($\frac{cy}{r} \times \frac{dy^3}{dx^2+dy^2}$) pour l'élément de la réſiſtance du ſolide formé par la révolution du profil *GALac* autour de ſon axe *VL*, c'eſt à dire pour la réſiſtance de la zone engendrée par la révolution du petit côté *Ff* autour de *VL*, qui eſt la même que la reſiſtance de *Ff* même répétée autant de fois, que ce circuit de *FNOF* a de points, en ſuposſant toujours pour les figures planes & ſolides, que leur baſe *GVc*, ou *CHcC* mar-

que ſa propre réſiſtance : & cette derniere formule eſt la même, que celle dont M. le Marquis de l'Hôpital a tiré le ſolide ci-devant.

Si l'on ſupoſe donc pour quatriéme exemple que la figure $CALac$ ſoit un demi cercle dont V ſoit le centre, VC, VL, Vc les rayons $= r$, entre leſquels VL ſoit perpendiculaire au diametre Cc; & que menant la perpendiculaire FK ſur Cc, VK étant toujours $= y = TF$, CK ſoit $= z$, & $LT = x$, on aura pour la réſiſtance de l'arc LAF $(y - \frac{y^3}{3r^2})$, qui devient $(\frac{2}{3r})$ pour le quart entier LAc, $(\frac{4r}{3})$ pour tout le demi cercle CLc; laquelle réſiſtance eſt à celle de $Cc = 2r$, comme 2, à, 3. De plus menant les droites CL, cL, on verra par l'article 10, cité ci-deſſus, que la réſiſtance de ces deux côtés du triangle CLc n'eſt que la moitié de celle de ſa baſe Cc. D'où l'on conclut que celle du demi cercle CLc eſt à celle de ces deux côtés enſemble, comme 4 à 3.

5. Si la figure $CALac$ eſt une premiere parabole dont le parametre ſoit (p), & qu'on ſupoſe que $(\frac{f}{2})$ ſoit le rayon du cercle des tables $= R$ & S un des ſinus, (NS) le nombre des degrés de l'arc aigu qui lui convient, & (CNS) le nombre des degrés du complément de ce dernier au quart de cercle, (p) le rayon d'un cercle quelconque, & $(\varkappa)$ ſon circuit, en ſupoſant $\left(S = \frac{\frac{1}{4}p^2}{\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + y^2}}\right)$ on aura $(\frac{CNS}{360} \times \frac{\varkappa R}{p})$ pour la réſiſtance de l'arc parabolique quelconque LAF; & prenant $\left(S = \frac{\frac{1}{4}p^2}{\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + b^2}}\right)$, on aura la réſiſtance de l'arc entier

LFC, ainſi la difference de ces deux valeurs eſt la réſiſtance de l'arc reſtant CF.

6. Si la figure $CALcc$ eſt formée de deux premieres paraboles LAC, Lac, jointes par une ordonnée commune LV à leur axe commun Cc, deſquelles le paramettres ſoit encore p, & VC, $Vc = a$, nommant $(\frac{1}{4}p + x, G)$, & $(\frac{1}{4}p, P.)$ Et prenant L pour marquer un logaritme quelconque des tables ici, & dans toute la ſuite, l'on aura pour la réſiſtance de l'arc quelconque CF $(G - \frac{LG + LP}{LP+1 - LP})$, & nommant encore $(\frac{1}{4}p + a, G)$, on aura la réſiſtance de l'arc entier $CFAL$; en ſe ſouvenant de mettre a & p dans leurs moindres parties poſſibles, comme en dixiémes de ligne, toutes les fois qu'on ſe ſervira de L.

7. Si l'on ſupoſe que le profil CLc ſoit une demi ellipſe ſimple, dont V ſoit le centre, VL, le grand demi axe $= a$, & le petit axe $Cc = 2b$; apellant R de l'article 5, $\sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2}}$, & $(S, \sqrt{\frac{b^2}{b^2 + y^2}})$ ou $(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}})$ on aura pour la réſiſtance de l'arc LAF ou $LAFC$ $\frac{a^2}{a^2 - b^2} \times \frac{CNS}{360} \times \frac{xR}{p} - \frac{by}{a^2 - b^2}$, ou $\frac{b^3}{a^2 - b^2}$).

8. Si LV eſt le petit demi axe toujours $= b$, & Cc le grand axe encore $= 2a$, nommant $(b\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}})$ $(\sqrt{2b^2 - 2y^2}$, ou $\frac{b^2 + ab}{\sqrt{2b^2 - 2a^2}}$, $G)$, & $(P, \frac{b}{\sqrt{2}})$, on aura pour la réſiſtance de l'arc LAF, ou $LAFc$ $(\frac{-b^2}{a^2 - b^2} \times \frac{LG - LP}{LP+1 - LP} + \frac{by}{c}$ ou $+ \frac{ba}{c}$.)

9. Si la courbe $CALac$ eſt une premiere hyperbole dont l'axe traverſant $(= 2a)$ ſoit ſur VL, que ſon conjugué ſoit $(= 2b)$, & $CV = p$; ſu-

posant $\sqrt{a^2+b^2}=c$, & $\frac{b^2}{c}=h$, R de l'article 5 $=h$, & $S=\frac{h^2}{\sqrt{h^2+y^2}}$ ou $\frac{h^2}{\sqrt{h^2+p^2}}$, on aura pour la résistance de l'arc LAF, ou LFC $\frac{a^2}{a^2+b^2}\times\frac{CNS}{360}\times\frac{R}{S}\left(+\frac{hy}{c}\right)$ ou $\left(+\frac{hp}{c}\right)$.

10. Si LV est une ordonnée commune aux deux hyperboles LAC, Lac, dont Cc soient les sommets, en sorte que leur axe traversant commun soit sur CVc toujours $=2a$, son conjugué toujours $=2b$, que CV soit $(=g-a)$ $(\sqrt{a^2-b^2}=c)$, & $\left(\frac{a^2}{c}=h\right)$, prenant $\left(P=\sqrt{\frac{g+h}{2g-2h}}\right)$, $\left(G=h\sqrt{\frac{a+h+x}{2a+2x-2h}}\right.$, ou $\left.h\sqrt{\frac{a+h}{2a-2h}}\right)$, on aura pour la résistance de CF ou de LFC, $\left(\frac{a+x}{c}\times h\right.$ ou $\left.\frac{ah}{c}\right)+\frac{b^2}{a^2-b^2}\times\frac{LG-LP}{LP+1-LP}$.)

11. Si présentement le solide $CALac$ est une pyramides isoscele, dont la base soit un polygone quelconque régulier ou irrégulier, mais circonscriptible à un cercle, V son centre, VL son axe, la résistance de toutes ses faces ensemble sera à celle de sa base entiere, comme le quarré du sinus de l'inclinaison commune de ces mêmes faces à l'axe LV est au quarré du rayon. Ce sera la même chose pour les cônes droits, qui sont les derniers de toutes les pyramides. D'où l'on voit que si cet angle est de 45 degrés, la premiere résistance sera à la derniere comme 1 à 2; si cette inclinaison est de 60 degrés, la premiere sera $\frac{3}{4}$ de la derniere; enfin si l'inclinaison est de 30 degrez, la premiere sera $\frac{1}{4}$ de la derniere.

12. Si le solide est une pyramide pareille à la précedente, laquelle soit tronquée parallelement à sa base $CHcC$, & que $BMbB$ soit un cercle

concentrique ſur cette baſe égal à la petite baſe $AIaA$, de cette pyramide, la réſiſtance de ſa ſurface inclinée ſera à celle de ſa couronne correſpondante $CHcCBMB$, dans la même proportion. Ce ſera la même choſe pour les cônes tronqués.

13. Si le ſolide $CLcH$ eſt une hemiſphere, V le centre de ſa baſe, LV ſon axe $= VC = r$, ſon grand cercle $CHcC = c$, la réſiſtance de ſon ſegment $LAIaA$ retranché perpendiculairement à LV ſera $\left(\frac{x}{4r} \times \overline{2r^2 - y^2}\right)$, & celle de l'hemiſphere entiere $\left(\frac{cr}{4}\right)$; au lieu que celle de ſa baſe $CHcC$ eſt $\left(\frac{cr}{2}\right)$; ainſi la premiere n'eſt que la moitié de la ſeconde, de même que dans le cône dont CLc eſt le triangle par l'axe; ce qui fait voir que ces deux réſiſtances ſont égales, & ce qui pourroit paſſer pour un paradoxe.

14. Si le ſolide $CLcH$ eſt un parabolide dont LV ſoit l'axe, le rayon CV de ſa baſe toujours $(= r)$ ſon parametre (p); prenant $P = \frac{p}{4}$, & $\left(G = \frac{y^2}{p} + \frac{1}{4}p,\ \text{ou}\ \frac{r^2}{p} + \frac{1}{4}p\right)$, on a $\left(\frac{xp}{8r} \times \frac{LG - LP}{L^{p+1} - LP}\right)$ pour la réſiſtance ou du ſegment $LAIa$, ou ſolide entier.

15. Si le ſolide $CLcH$ eſt un conoïde formé par une parabole LAC tournée ſur l'ordonnée LV à ſon axe CV; & que CV ſoit toujours $= r$, & le parametre $= p$; prenant $\left(P = \frac{p}{4}\right)$, & $\left(G = \frac{1}{4}p + z,\ \text{ou}\ \frac{1}{4}p + r\right)$, on aura $-\frac{r}{4} - \frac{p}{16} \times \frac{x}{r} \times \frac{LG - LP}{L^{p+1} - LP} \left(+ r + \frac{1}{2}p \times \overline{z + \frac{1}{4}p} - \overline{z - \frac{1}{4}p}^2\right)$ ou $\left(+ r + \frac{1}{2}p \times \overline{r + \frac{1}{4}p} - \overline{r - \frac{1}{4}p}^2\right)$, pour

la réſiſtance du ſegment $LAIaA$, ou du ſolide entier $CLcH$.

16. Si le ſolide $LACHc$ eſt un fuſeau concave formé par la parabole renverſée LAC tournée à l'entour de ſa tangente LV par ſon ſommet L, comme axe, l'axe de la parabole CV étant toujours $= r$, & ſon parametre $(= p)$, & prenant $(P = \frac{1}{4}p)$, & $(G = r - z + \frac{1}{4}p$, ou $r + \frac{1}{4}p)$, on aura $\frac{x}{2P} \times \frac{p}{8} \times \frac{LG - LP}{L_{P+1} - LP} - (p \times \overline{r - z + \frac{1}{4}p + r - z + \frac{1}{4}p}^{2}$, ou $- p \times \overline{r + \frac{1}{4}p + r + \frac{1}{4}p}^{2})$ pour la réſiſtance du ſegment $LAIa$, ou pour tout le ſolide entier.

17. Si Cc ſont les ſommets de deux paraboles, Cc leur tangente commune, LV une parallele à leurs axes priſe pour axe de révolution, que CV ſoit toujours $= r$, & le parametre $= p$, prenant $(R = \frac{p}{2})$, & $(S = \frac{\frac{1}{4}p^2}{\frac{1}{4}p^2 + z^2}$, ou $\frac{\frac{1}{4}p^2}{\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + r^2}})$ dans l'art. 5; & de plus $(P = \frac{1}{4}p)$, & $(G = \frac{z^2}{p} + \frac{1}{4}p$, ou $\frac{r^2}{p} + \frac{p}{8})$, on aura $(8r \times \frac{CNS}{360} \times \frac{xR}{p} - p \times \frac{LG - LP}{L_{P+1} - LP} \times \frac{x}{8p})$ pour la réſiſtance de la zone $ACHca$, our le ſolide entier.

18. Si le profil $LACHca$ eſt une demi élipſe dont le grand demi axe LV ſoit celui de révolution $= a$, CV le demi axe conjuge $= r$, que l'on faſſe $(\sqrt{a^2 - r^2} = c)$, & $(b = \frac{r^2}{c})$ prenant $(P = \frac{b}{2})$, & $(G = \frac{y^2}{2b} + \frac{b}{2}$, ou $\frac{r^2}{2b} + \frac{b}{2})$, on aura $\frac{xb}{2pc} \times \frac{c + b}{c} \times \frac{LG - LP}{L_{P+1} - LP} (- y^2$, ou $- r^2)$

pour la réſiſtance du ſegment $LAIa$, ou du ſolide entier.

19. Si le profil $CALac$ eſt une premiere hyperbole, dont LV ſoit ſur l'axe traverſant, CV une ordonnée $= r$; que l'axe traverſant ſoit $(= 2a)$ & le conjuge $(= 2b)$; ſupoſant encore $\sqrt{a^2+b^2} = c$, & $(\frac{b^2}{c} = h)$, on aura les mêmes réſiſtances, que dans l'article précédent, tant du ſegment $LAIa$, que du ſolide entier, en changeant ſeulement $(c+h)$ en $(c-h)$, & $(-y^2$, ou $= r^2)$ en $(+y^2$ ou $+r^2.)$

20. Mais ſi LV eſt une ordonnée commune aux deux hyperboles LAC, Lac, qui ſoit priſe pour axe de révolution; que CVc ſoit ſur l'axe traverſant commun; que VC ſoit toujours $(=r)$ l'axe traverſant toujours $(=a)$, le conjugué $=b$, $(a+r=g)$, $LV=p$. Faiſant de plus $(\sqrt{a^2+b^2} = c)$, & $(\frac{a^2}{c} = h)$; & prenant $(P = \frac{a^2-b^2}{p})$, $(G = \frac{\overline{a+z}^2-b^2}{p}$, ou $\frac{g^2-b^2}{p})$, $(h\sqrt{\frac{g+h}{2g-2h}} = \varpi)$ $(\gamma = h\sqrt{\frac{a+z+h}{2a-2z-2a}}$, ou $h\sqrt{\frac{a+h}{2a-2a}})$, on aura $(g \times \frac{LG-LP}{L_{P+1}-LP} - \frac{h}{2} \times \frac{I\gamma - L\pi}{L_{\varpi+1}-L\varpi} \times \frac{h-c}{7c} \times \frac{u}{p}$ $+ (h \times \overline{a+z} - \overline{a-z}^2 - b^2$, ou $+hg - a^2 - b^2)$ pour la réſiſtance de la zone $AIaCHh$, ou du ſolide entier.

Mais c'eſt aſſez navigé ſur les eaux, voyons maintenant comme les oiſeaux naviguent dans les airs.

III. PROBLEME.

Supplément au calcul du Vol en toutes ſortes de circonſtances, où l'on perfectionne ce qui n'avoit été qu'ébauché dans le troiſiéme volume de nos Eſſais.

1. Trouver la viteſſe des aîles & de l'oiſeau, le reſte étant donné.

NOMMANT comme dans le 18e Memoire du 3e Tome de nos Eſſais *l* la largeur *FI* d'une des aîles *AFC* de l'oiſeau (figure 8) que l'on prend pour le diametre de cette aîle, conçue toute plate par le deſſous; les abciſſes *IE* de *IF*, *x*, les ordonnées *DG* (*y*), leurs diſtances infiniment petites *Ee*, *dx*; les élemens de l'aire ſeront (*ydx*) & l'aire entiere (*sydx*), en changeant *x* en *l*. Les viteſſes de chacun de ces élemens autour de l'axe de rotation *AC* étant repréſentées par leurs diſtances, (*x*) a cet axe, les réſiſtances ou efforts de l'air contre chacun de ces élemens ſeront (x^2ydx), & leur ſommes (sx^2ydx). Le moment de chaque élement à l'égard du même axe *AC*, ſera donc (x^3ydx), & leur ſomme (sx^3ydx), en changeant toujours *x* en *l*, comme ci-deſſus. Or cette derniere ſomme étant diviſée par ſa précédente, donnera ($\frac{sx^3ydx}{sx^2ydx}$) pour la diſtance *IL* du même axe *AC* au centre d'impreſſion *L* de l'air contre l'aîle, comme on l'a démontré au lieu cité ci-deſſus.

Apellant donc encore *V* la viteſſe circulaire

qu'a le point L autour de AC pendant le vol de l'oiſeau priſe en piés par ſeconde ; c la réſiſtance naturelle de l'aîle par ſa concavité réduite à un plan, & D ſa réſiſtance par ſa convexité réduite de même, & avec même viteſſe ; Z la viteſſe que l'oiſeau doit prendre dans ſa route quelconque LH, qu'on ſuppoſe toujours parallele à un plan vertical mené par le centre de gravité commun de l'oiſeau & de ſa charge ; l'aire de l'aîle AFC, ($a = sydx$) ; & b, la réſiſtance naturelle du corps de l'oiſeau dans ſa route réduite auſſi à un plan ; on imaginera la perpendiculaire LQ au plan de l'aîle ſituée de telle maniere, que LQ ſoit parallele au vertical ci-deſſus ; & dans le vertical mené par LQ parallement à ce premier, on concevra la verticale LO ou QP, & l'horizontale LP ; & on prendra LQ à volonté pour repréſenter l'effort de l'air en L, ſelon MLQ, tangente en L à l'arc de mouvement RLN ; alors LO marquera l'effort du même air ſelon la verticale LO ou QP, & LP ſon effort horizontal ; & retranchant de cet effort vertical LO ou QP la moitié du poids de l'oiſeau ($= \frac{p}{2}$) que cette aîle ſoutient (en ſuppoſant que le vol ſe fait au deſſus de l'horiſon,) & que je repréſente par $Q\mathcal{E}$, partie de QP ; le reſte $P\mathcal{E}$ de cet effort vertical joint à l'effort horizontal LP, compoſera la route $L\mathcal{E}W$ de l'oiſeau, & ſa viteſſe (z) en cette route ; ainſi $L\mathcal{E}$ marquera encore l'effort du même air ſelon cette même route $L\mathcal{E}$.

Si de plus on repréſente la viteſſe V du point L ſelon LQ par LQ même, & z par LH priſe ſur $L\mathcal{E}$; menant la perpendiculaire HS à LQ, la partie LS marquera la viteſſe relative dont ce point où l'oiſeau avançant par LH fuit l'impreſ-

ſion de contre l'aîle en LQ. Ainſi SQ marquera en même temps la viteſſe reſpective de cet air contre la même aîle, ou de l'aîle contre l'air, & l'air avec cette viteſſe SQ agira contre l'aîle, de même que ſi l'oiſeau & l'aîle étoient en repos.

Prenant donc ſur LH, $LB = LQ$, & menant des points Q & B les perpendiculaires QW ſur $L\mathcal{A}$, & BK ſur LP & nommant LB, $LQ(r)$ $QW\,t$; $LW\,u$; BKq, LKm ; LO ou QPs ; & LP, c ; on aura à cauſe des triangles rectangl. ſemblables $QW\mathcal{A}$, $LP\mathcal{A}$, cette analogie : (comme $QW = t$, eſt à $LP = c$; ainſi $Q\mathcal{A}$ à $L\mathcal{A}$, ainſi l'effort en $\mathcal{A}Q = \frac{p}{2}$ à un quatrieme terme ($\frac{cp}{2t}$) ce ſera l'effort de l'air, poſterieur contre l'aîle ſelon $L\mathcal{A}$, lequel doit faire un équilibre de viteſſe avec la réſiſtance de l'air anterieur contre le corps de l'oiſeau dans la même $W\mathcal{A}L$. Pour marquer donc cette derniere réſiſtance par le moyen de l'effort ($\frac{cp}{2t}$), on ſe ſouviendra du principe que nous nous avons établi (dans le 29ᵉ Memoire du même 3ᵉ Volume cité ci-deſſus, 3ᵉ exemple, page 405) ſur trois experiences de M. Mariotte, & du R. P. Sebaſtien Carme ; ſçavoir [*Qu'un Jet d'eau d'un pied de viteſſe par ſeconde ebouquant une ſurface plate d'un pied quarré de baſe ſoutient 45 demi onces*] ; ou ſi l'on veut joindre encore à ces trois experiences, celles de Galillée & de M. Huygens, dont le premier donne 12 piés à la chute verticale d'un corps dans la premiere ſeconde de tems, & le ſecond 15 piés, à la fin de ſon Traité du Centre d'Ocillation ; on trouvera [*pour la force moyenne du même Jet d'eau 22 onces, au lieu de 22 onces & demie ; d'où il ſuit qu'un Jet d'air tout pareil doit ſoutenir ſeulement 22 grains*] en prenant la maſſe de l'eau à celle de l'air,

l'air, comme 576 à 1, ou comme 1 once à 1 grain, avec M. Mariotte (Mouvement des Eaux, 2e Partie, 3e Diſcours, 4e Regle), ce qui donnera cette autre analogie compoſée : [Si 1 pied quarré de viteſſe, contre un pied quarré de bâſe, ſoutient 22 grains ; que ſoutiendra (z^2) de viteſſe contre la bâſe b] ? Il viendra au 4e terme ($22z^2b$) pour la reſiſtance de l'air anterieur, [*c'eſt à dire que 22 fois la force geométrique de l'air* (z^2b) *donne toujours ſa force méchanique en grains*], laquelle étant égalée à ($\frac{cp}{2t}$) ci-deſſus, donne la premiere équation ($\frac{cp}{44tb} = z^2$) ; d'où l'on tire ($z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{cp}{11tb}}$), qui ſont des piés par ſecondes, en reduiſant P en grains, & b en piés quarrés, comme dans le dernier Principe d'Experience.

De plus, les triangles rectangles ſemblables LQW, LHS, donneront l'analogie [$LQ = r$ | $LW = \sqrt{r^2 - t^2} = u$, (à cauſe de l'angle droit LWQ) || $LH = z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{cp}{11tb}}$ | $\frac{u\sqrt{cp}}{2r\sqrt{11tb}} = LS$, laquelle étant retranchée de V marquée par LQ, donne ($\frac{2rV\sqrt{11tb} - u\sqrt{cp}}{2r\sqrt{ut}b}$) pour la viteſſe reſpective SQ de l'air poſterieur contre l'aile ſelon LQ. C'eſt pourquoi prenant le quarré de cette viteſſe, le multipliant par la bâſe de l'aile a, & par 22, on aura par le 3e Principe d'experience ci-deſſus, l'effort méchanique de l'air poſterieur ſelon LQ ($= \frac{2rV\sqrt{11tb} - u\sqrt{cp}}{2r^2tb}^2 \times \frac{a}{2r^2tb}$), lequel effort doit être diminué dans le raport de l'arc de mouvement RLN à ſa corde RN, ou de de, à e, comme on l'a démontré dans le Mémoire du Vol cité ci-devant ; ce qui donnera pour cet effort réduit ($\frac{2rV\sqrt{11tb} - u\sqrt{cp}}{2r^2tbd}^2 \times \frac{af}{2r^2tbd}$.) Or les triangles ſemblables

LBK, $L\text{Æ}P$, $Q\text{Æ}W$, donneront l'analogie [$LK=m \mid LB=r \parallel LP \mid L\text{Æ} \parallel QW=t \mid Q\text{Æ}=\frac{rt}{m}$]; d'où l'on tire cette autre analogie [comme $LQ=r \mid Q\text{Æ}=\frac{rt}{m} \parallel m \mid t$. Ainſi la force de l'air en $LQ=\overline{2rV\sqrt{11tb}-uV\overline{cp}}^{2}\times\frac{ae}{2r^{2}tbd}$ a ſon effort en $\text{Æ}Q=\frac{p}{2}$; ce qui donne la ſeconde équation $\left(\frac{r^{2}bmPd}{ae}=\overline{2rV\sqrt{11tb}-uV\overline{cp}}^{2}\right)$; & tirant les racines quarrées, on a $\left(r\sqrt{\frac{bmPd}{ae}}=2rV\sqrt{11tb}-uV\overline{cp}\right)$, & $\left(r\sqrt{\frac{bmPd}{ae}}+uV\overline{cp}=2rV\sqrt{11tb}\right)$, & enfin $\left(\frac{r\sqrt{\frac{bmPd}{ae}}+uV\overline{cp}}{2rV\sqrt{11tb}}=V=\frac{rb\sqrt{11dmtPae}+aue\sqrt{11tbcP}}{22rtbae}\right)$, qui ſont des piés par ſeconde, leſquels étant diviſés par l'arc de mouvement, $RLN=d$ meſuré auſſi en piés, donnent au quotient le nombre (N) de coups que l'aile AFC doit battre par chaque ſeconde, ſans compter ſes relevées; afin que demeurant ferme dans la ſituation donnée ($\frac{r}{s}$) ou ($\frac{r}{c}$), l'oiſeau ſuive la route donnée LH, faiſant l'angle ($\frac{r}{t}$) ou ($\frac{r}{u}$) avec LQ, ou l'angle ($\frac{r}{q}$) ou ($\frac{r}{m}$) avec l'horizontale LP, & avance dans cette route de la viteſſe ($z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{cP}{11tb}}$).

Quand le vol ſe fera ſelon l'horizontale LPK, alors la moitié $Q\text{Æ}$ du poids P de l'oiſeau ſera elle ſeule égale à l'effort vertical LO ou PQ de l'air, & l'on aura ($QP=S=t=QW$, $LP=c=L\text{Æ}=u$, & $LK=m=LB=r$), ce qui changera la valeur de N ci-deſſus en cette autre, $\left(\frac{rb\sqrt{11drsPae}+ace\sqrt{11shPc}}{2rsbaed}=N\right)$.

Mais quand le vol ſe fera en deſcendant ſelon la droite La, qui coupe QP prolongée en deſſous

en *æ*; $Q\text{æ}$ marquant toujours la moitié du poids de l'oiſeau avec ſa charge; & l'effort PQ de l'air ne détruiſant alors qu'une partie de ce poids égale à cet effort; il reſtera encore la partie $P\text{æ}$ de ce même poids, qui fera accélérer le corps de l'oiſeau verticalement en bas, comme s'il n'avoit que cette ſeule peſanteur $P\text{æ}$. Mais l'effort horizontal LP de l'air le fera avancer en même temps ſelon LP; & cela juſques à ce que la viteſſe acquiſe ſelon $L\text{æ}$ par ces deux forces conjointes, excite aſſez de réſiſtance dans l'air anterieur choquant ſelon $\text{æ}L$, pour faire un continuel équilibre de viteſſe avec elles. Auquel cas les deux efforts LP, $P\text{æ}$, ſeront encore continuellement aneantis par la réſiſtance de l'air anterieur, & l'accélération finie: Mais le calcul ſera toujours le même. On ſe ſouviendra ſeulement que $Q\text{æ}$ ne marque plus autre choſe que $(\frac{P}{2})$, comme on vient de le dire; & que quand l'angle $QL\text{æ}$ eſt obtus, la perpendiculaire HS tombe ſur QL en deſſous du point L; auquel cas il faut ajoûter la viteſſe rélative LS de l'oiſeau ſelon LM à l'encontre de l'air qui choque l'aile, à la viteſſe LQ du même air, pour avoir la viteſſe reſpective SQ de cet air contre l'aile; ce qui donne en ce cas $(N=\frac{rb\sqrt{11dmtaeP}-aue\sqrt{11tbPc}}{22rtbaed})$, & $(N=\frac{\sqrt{11dmtae''}}{22taed})$ quand l'angle $GL\text{æ}$ eſt droit, S tombant alors en L, ou LS étant $=0$.

2. Quand la viteſſe V de l'aile eſt donnée, avec ſa ſituation $(\frac{r}{c})$ ou $(\frac{r}{S})$, & que l'on cherche quelle ſera la route LB que l'oiſeau tiendra, & la viteſſe qu'il aura ſur cette route, il ne s'agira que de changer, par exemple, la valeur de m des équations précedentes, en n & t; ou réciproquement

u & t, en m & q ; & pour cet effet les paralleles BK, QP, & l'angle droit LKB, donneront cette analogie ($LK = m \mid LP = c \parallel BK = \sqrt{r^2 - m^2} \mid \text{Æ}P = \frac{c\sqrt{r^2-m^2}}{m}$), laquelle étant retranchée de $QP = S$, ou ajoûtée à la même, donne $Q\text{Æ}$; d'où l'on tire l'analogie $Q\text{Æ} = \frac{mS \mp c\sqrt{r^2-m^2}}{m} \mid QV = t \parallel L\text{Æ} \mid LP \parallel LB = r \mid LK = m$), à cauſe des triangles rectangles opoſés $Q\text{Æ}V$, $L\text{Æ}P$, qui ſont ſemblables ; ce qui donne l'équation $(ms \mp tc\sqrt{r^2 - m^2} = tr)$, & $(ms - tr = c\sqrt{r^2 - m^2})$, & $(m^2s^2 + t^2r^2 - 2mstr = c^2r^2 - c^2m^2)$, & enfin $(m^2 - \frac{2mst}{r} = c^2 - t^2)$, d'où l'on tire $(m = \frac{st \pm uc}{r})$, laquelle étant ſubſtituée dans la ſeconde équation de l'article précedent, la change en cette forme $(\frac{rbPd}{ae} \times \overline{st \mp uc} = 2rV\sqrt{11bt - uVpc^2})$, dans laquelle t & u ſont les deux ſinus corrélatifs deſirés, qui déterminent la route LH, par raport à LQ. On déduit auſſi de la même équation ci-deſſus, $(ms \mp c\sqrt{r^2 - m^2} = tr)$, $(\frac{mS \mp cq}{r} = t)$, & $(\frac{mc \mp qS}{r} = u = \sqrt{r^2 - t^2})$; & ces valeurs de t & de u étant ſubſtituées dans la même ſeconde équation, la changent encore en cette autre forme, $(\frac{r^2bmPd}{ae} = 2V\sqrt{11br \times \overline{mS \mp qc} \mp \frac{mc \mp qS}{r} \times Vpc})$, dans laquelle m & q ſont les deux ſinus corrélatifs deſirés, qui marquent la ſituation de la route LH, avec leſquels on aura auſſi-tôt (t) & (z).

3°. Lorſque la viteſſe V ſera donnée, avec la route de l'oiſeau ; c'eſt à dire, par exemple $(\frac{r}{m})$ ou $(\frac{r}{q})$, on trouvera auſſi-tôt les ſinus corrélatifs c & s de la ſituation de l'aile ſur l'horizontale LP par la derniere équation.

4°. Si l'on aime mieux avoir deux équations à resoudre pour chaque cas, que les deux dernieres équations, on supposera dans la pénultiéme (par exemple) ($\gamma 11b = y$), ce qui donnera ($t = \frac{y^2}{11b}$), & ($st + uc = \frac{sy^2 + 11ubc}{11b}$), qui étant substituée dans cette équation, la changera en cette autre, [$\frac{rbPd}{de} \times \frac{sy^2 + 11cub}{11b} = qr^2u^2y^2 + u^2pe \mp 2r\sqrt{cp} \times uy$]; & parceque ($r^2 = u^2 + t^2$), on aura aussi [$u^2 = r^2 - \frac{y^4}{121b^2}$], qui sont deux Lieux aisés à construire soit geométriquement, soit par le calcul, & dont la résolution donnera (y & u), & par conséquent aussi t & z).

On pourra supposer de même dans la dernière équation de l'article précedent ($ms + qc = y^2$), & ($mc + qs = x$), d'où l'on tirera ($m = \frac{y^2s + cx}{r^2}$), & ($q = \frac{sx \mp cy^2}{r^2}$), & ces valeurs y étant substituées, on la changera en cette autre [$\frac{r^2bdP}{de} \times \frac{y^2s + cx}{r^2} = 44V^2r^2by^2 + x^2pc \mp 4\sqrt{r}yx\sqrt{11brpc}$]; on aura aussi [$m^2 + q^2 = r^2 = \frac{y^4 + x^2}{r^2}$], & la résolution de ces deux équations donnera x & y, & par conséquent aussi m & q desirés.

Et supolant dans la même encore ($ms + qc = y^2$), & ($\sqrt{pc} = x$), on trouve ($s = \frac{y^2p \pm x^2q}{pm}$), & ($c = \frac{x^2}{p}$), & les 2 équations à resoudre ($\frac{rbmPd}{ae} = 2\sqrt{y}\sqrt{11br} \mp \frac{r^2x^3 \mp qpy^2x}{prm}$)^2, & ($y^4p^2 \mp 2y^2x^2pq + x^4q^2 = r^2p^2m^2$), avec lesquelles on trouvera x & y, & les inconnues c & s.

IV. PROBLÈME.

Sur la Perſpective, où l'on ſupplée & l'on perfectionne ce que nous en avons publié dans les Mémoires de Trévoux du mois d'Octobre 1713.

1°. Sur les Tableaux.

ETANT données la largeur *AB* d'un Tableau plan *AFBG* de figure rectangulaire, avec les diſtances *LV*, *LE* de la ligne de terre *AB*, a ſon point de vûe *V*, ou a ſa ligne horizontale *HI*, & a un point *E* de ſa ligne verticale *LV*, laquelle *LE* ſoit la repréſentation d'une diſtance auſſi donnée *Le*, ſur la verticale *Lx* du plan geometral *ABrx*, & auſſi les diſtances *OS*, *LS*, de l'œil *O* du ſpectateur à la ligne de ſtation *SL*, & à la ligne de terre, ou bâſe *AB* du Tableau : Trouver la ſituation qu'il faut donner, tant au Tableau, qu'au plan geometral ſur le plan de l'horizon *ABSQ*, afin que la repréſentation propoſée ſoit parfaite avec les conditions données.

1. Il arrive ſouvent dans la pratique de la Perſpective, qu'ayant pris les longueurs *LS*, *OS*, *AB*, *LV*, les plus commodes ; les parties *ed*, *er*, du plan geometral, qui ſont un peu éloignées de *AB*, ont leurs repréſentations *CED*, *ER*, confuſes, & trop ſerrées ; quoiqu'il y ait encore quantité d'objets ſur le plan geometral au-delà de *e*, à repreſenter entre *E* & l'horizontale *HI*, ſur laquelle on peint la rencontre du ciel avec la terre, ou avec le plan geometral. C'eſt ce qui

oblige ſouvent de changer les meſures commodes qu'on avoit priſes d'abord, pour en prendre de plus incommodes ; ſans quoi tous les objets peints entre *E* & *HI* ſeroient confus. Pour éviter donc l'embarras de ce changement, il ne faut que prendre d'abord *Le* à diſcretion, auſſi-bien que le raport de la droite *ced* parallele à *AB*, à ſa repreſentation *CD* ; & de même que les longueurs *LV*, *AB*, *LS*, *OS* : & ſe ſouvenir que dès que *Le* eſt déterminée en longueur, avec le raport de *ced* à ſa répréſentation *CD* ; la longueur *LE* eſt auſſitôt déterminée, telle que ſoit la pente du Tableau ; *cd* étant toujours à *CD*, comme *LV* à *EV*. Car menant les rayons *OCc*, *OEe*, *ODd* de l'œil du ſpectateur rencontrant le Tableau en *CED*, avec le rayon principal *OV*, qui eſt toujours parallele à *Le*, ſuivant les regles de la Perſpective, les triangles ſemblables *OCD*, *Ocd*, *OVE*, *ELe*, (à cauſe des paralleles *CD*, *cd*, *OV*, *Le*), donneront les analogies (*cd* | *CD* || *eO* | *EO* || *LV* | *EV*). Ainſi après avoir pris *ced* à diſcretion, comme de 300 toiſes, avec ſon raport à ſa répréſentation *CD*, comme de 300 toiſes, ou de 1800 pieds à 1 pied, il faudra faire l'analogie (comme *cd* à *CD*, ou comme 1800 à 1 ; ainſi *LV* à *EV*. Ce qui donnera le point *E*.

Mais comme par cette détermination du point *E*, il pourra ſe faire qu'une partie *er*, *de*, *Le*, voiſine de *e*, aura auſſi ſa répréſentation *ER* trop petite, & par conſequent trop confuſe, il faut, avant de paſſer outre, trouver la valeur de *ER* répréſentation de *er*. Et pour cet effet il faut ſçavoir, que toujours (*VL* × *Le* | *VE* × *LE* || *er* | *ER*), en prenant *er* la moindre qu'il ſe puiſſe. Et pour le voir, menés au point *r* de *er* le rayon *ORr* rencontrant *VL* en *R*, & la droite *ET* parallele

à VO, sur ORr, en T, pour avoir les triangles semblables OVR, TER; & faites les analogies ($VL \mid VE \parallel Oe \mid OE \parallel er \mid ET$), & ($Le \mid LE \parallel VO \mid VE$, ou VR), (à cause de la petitesse de er, ER) $\parallel ET \mid ER$), & multipliant d'ordre ces deux dernieres analogies, on en tire celle-ci, ($VL \times Le \parallel VE \times LE \parallel er \times ET \mid ER \times ET$), d'où l'on a déduit en réduisant, l'analogie ci-dessus. Ayant donc trouvé d'abord le point E, & fait cette analogie ensuite, on verra si RE suffit pour représenter re; & si elle ne suffit pas, on recommencera les deux operations jusques à ce que CD & ER soient les plus commodes.

2. Les points E & R étant ainsi établis, on nommera les quantités connues (OS, a; SL, b; LE, c; Le, f; LV, g); & menant la droite OP, parallele à LV, sur SL, en P, pour avoir l'angle OPS égal à l'angle VLS de l'inclinaison du Tableau, on nommera OP, OS, SP, prises pour des sinus (r, x, y). De plus ayant pris sur Le, depuis L, une longueur Ln à volonté, on menera la perpendiculaire nm sur SL prolongée en m, afin d'avoir l'angle nLm égal à l'inclinaison du plan geometral sur l'horizon; & on apellera les sinus nL, nm, mL, (r, u, z). Enfin je prolonge VO sur LS aussi prolongée en Q, ce qui me donne les triangles semblables VLQ, OPQ; nmL, OSQ; & menant la ligne d'aplomb VN parallele à OS, sur SL en N, on a encore les triangles semblables VNQ, OSQ, tous ces triangles étant formés de lignes paralleles. A l'égard des droites AH, BI, il est évident qu'elles sont les représentations des côtes indéfinis Ab, Bi du plan geometral; ce que l'on voit aisément en imaginant deux plans verticals passer par les paralleles OP,

HA, IB, lesquels coupent le plan horizontal $ABSQ$ dans les droites indéfinies PAK, PBM, & le plan geometral dans les indéfinies Ah, Bi; ainsi tous les objets situés entre AB & Ah, Bi, auront leurs représentations dans le rectangle $ABIH$, comme ils le doivent.

Faites donc presentement les analogies : comme $LE = c$ est à $EV = g - c$, ainsi $Le = f$, à $VO = \frac{fg - fc}{c}$; & comme OP est OS, ou comme r est à x, ainsi $LV = g$, à $VN = \frac{gx}{r}$; & encore comme $VN - OS = \frac{gx}{r} - a$, est à $OS = a$, ou comme $gx - ar$ est à ar, ainsi $VO = \frac{fg - fc}{c}$ à $\frac{arfg - arfc}{cgx - car} = OQ$; & enfin, comme nm, est à nL, ou comme u est à r, ainsi $OS = a$, à $OQ = \frac{ar}{u}$; d'où l'on tire une 1re équation, $(\frac{ar}{u} = \frac{arfg - arfc}{cgx - car})$, qui donne $(cgx - car = ufg - ufc)$, ou $cgx - car = uef$), en supposant $(g - c = e = EV)$; d'où l'on déduit $(u = \frac{cgx - car}{ef})$.

Faites encore les analogies suivantes, comme OS à PS, ou comme x à y, ainsi $OS = a$, à $(SP = \frac{ay}{x})$, pour avoir $LP = LS - PS = b - \frac{ay}{x} = \frac{bx - ay}{x}$; & comme $nm = u$ à $mL = x$, ainsi $OS = a$ à $(SQ = \frac{az}{u})$, pour avoir $PQ = \frac{ay}{x} + \frac{az}{u} = \frac{auy + axx}{xu}$); & enfin comme $LP = \frac{bx - ay}{x}$ est à $PQ = \frac{auy + axx}{xu}$; ainsi $VO = \frac{fe}{e}$ ci-dessus, à $(OQ = \frac{feuy + fexx}{ucbx - ucay} = \frac{ar}{u})$, ci-dessus; d'où l'on déduit la 2e égalité $(feuy + fexz = cbxr - cayr)$, ou plutôt $(fexz = cbxr - cayr - feuy)$ dans laquelle substituant la valeur de (u) tirée de la premiere équation, il vient $(fexz = cbxr - cayr$

$-cgxy + cary = cbxr - cqxy$). Et pour chaſſer encore de cette derniere les quantités z & y, je la reduis d'abord à ($z = \frac{cbr - cgy}{fe}$), par la diviſion, & quarrant chaque membre, il vient

$$\left(z^2 = \frac{c^2b^2r^2 + c^2g^2y^2 - 2c^2brgy}{f^2e^2}\right).$$

Je fais auſſi la 3e équation ($u^2 = r^2 - z^2$), tirée du triangle rectangle umL; & la comparant avec la premiere ($u = \frac{cgx - car}{ef}$) quarrée, ſçavoir

$$\left(u^2 = \frac{c^2g^2x^2 + c^2a^2r^2 - 2c^2gxar}{e^2f^2}\right),$$

j'en tire une 4e ($f^2e^2r^2 - z^2e^2f^2 = c^2g^2x^2 + c^2a^2r^2 - 2c^2gxar$), d'où je tire

$$\left(z^2 = \frac{f^2e^2r^2 - c^2g^2x^2 - c^2a^2r^2 + 2c^2gxar}{e^2f^2}\right).$$

Comparant donc ces deux valeurs de (z^2), il vient une 5e équation ($c^2b^2r^2 + c^2g^2y^2 - 2c^2brgy = f^2e^2r^2 - c^2g^2x^2 - c^2a^2r^2 + 2c^2gxar$). Je prens encore la 6e équation ($r^2 - x^2 = y^2$), tirée du triangle rectangle OPS, & ſubſtituant cette valeur d'y^2, & celle d'y dans la 5e équation, elle ſe change en celle-ci ($c^2b^2r^2 + c^2g^2r^2 - c^2g^2x^2 - 2c^2brg\sqrt{r^2 - x^2} = f^2e^2r^2 - c^2g^2x^2 - c^2a^2r^2 + 2c^2gxar$), qui ſe change encore en cette autre

$$A\left(\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{c^2b^2 + c^2g^2 - e^2f^2 + a^2c^2 \times r - 2c^2gax}{2c^2bg}\right);$$

& ſuposant pour abreger ($\overline{c^2b^2 + c^2g^2 + a^2c^2 - e^2f^2}$ $= +2c^2gl$), on la reduit à ($\sqrt{r^2 - x^2} = +\frac{rl - ax}{b}$); & quarrant il vient ($b^2r^2 - b^2x^2 = r^2l^2 + a^2x^2 - 2rlax$), d'où l'on tire ($x^2 = \frac{2arlx}{a^2 + b^2} = \frac{b^2r^2 - l^2r^2}{a^2 + b^2}$),

& prenant ($m^2 = a^2 + b^2 = OL^2$), à cauſe de l'angle droit OSL, on en tire encore ($x^2 + \frac{2arlx}{m^2} + \frac{a^2r^2l^2}{m^4} = \frac{a^2r^2l^2}{m^4} + \frac{b^2g^2 - l^2r^2}{m^2}$), de laquelle tirant les racines, on a enfin ($x = al \pm \sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 - l^2m^2} \times \frac{r}{m^2}$), qui donne la pente du Tableau ſur l'horizon ABS. Donc auſſi ($u = \frac{cgx - car}{cf} = \frac{cgal - cam^2}{cfm^2} = \sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 - l^2m^2} \times eg \times \frac{r}{cfm^2}$), qui donne l'élevation du plan geometral ſur l'horizontal ABS.

Sur les Perſpectives.

3. Mais comme les Perſpectives qui ſervent d'ornement aux maiſons, aux jardins, & aux theatres, ſont ordinairement répréſentées ſur des Tableaux à plomb $ABGF$, il eſt évident qu'en ce cas $OS = x$, eſt égale à $r = OP$; ainſi dans l'équation $A, \sqrt{r^2 - x^2}$ étant $= o$, il en reſulte cette autre ($+ c^2b^2 + c^2g^2 - e^2f^2 + a^2c^2 - 2c^2ga = o$), dans laquelle on peut prendre pour inconnue quelle quantité on voudra à ſouhait, entre leſquelles $LV = g$ paroît la plus commode pour la pratique, les autres AB, LS, OS étant preſque toujours données. Subſtituant donc la valeur de ($e^2 = g^2 + c^2 - 2gc$), on la change en celle-ci ($c^2b^2 - c^2f^2 + a^2c^2 = g^2f^2 - c^2g^2 + 2c^2ag - 2cf^2g$), ou ($\frac{+b^2 - f^2 + a^2}{+f^2 - c^2} \times c^2 = g^2 + \frac{ca - f^2}{f^2 - c^2} \times 2cg$); d'où l'on tire ($g = f^2 - ca \pm \sqrt{f^2 - c^2} \times b^2 + \overline{a - c}^2 \times f^2 \times \frac{c}{f^2 - c^2} = LV$), ce qui donne auſſi-tôt la valeur de ($u = \frac{g - a}{g - c} \times \frac{cr}{f} = nm$) ci-deſſus.

Ces choſes étant déterminées, il ſera aiſé d'achever le Tableau, ou la Perſpective par les regles ordinaires de cet Art.

4. Quant aux conditions que quelques Auteurs demandent, outre celles que nous venons de marquer, comme de ne répréſenter que les objets qui ſont compris dans un cône viſuel ouvert de 45 degrés, ou de 60, &c. & que tous les quarreaux du plan geometral ayent une figure aplatie en allant de la ligne de terre *A B* vers le point de vûe *V*, ce ſont de pures ſuperſtitions, auſquelles je ne m'étois abſtraint, que par complaiſance pour intime ami qui le ſouhaitoit ainſi, (Memoires de Trevoux, Octobre 1714); étant certain qu'un Tableau peut répréſenter tout ce que l'œil peut apercevoir, ſans ſortir de ſon lieu, en ſe tournant ſur lui-même de tous côtés, & même en tournant la tête en tout ſens, pourvû que le reſte du corps ſoit immobile. Car par ce moyen le centre de chaque œil ne changeant pas ſenſiblement de place, la peinture de tous les objets viſibles, (qui eſt alors renfermée dans un cône viſuel autant ouvert qu'il le peut être), eſt toujours la même au fond de l'œil, quoiqu'elle y change continuellement de place. D'où il ſuit qu'on peut augmenter la largeur d'un Tableau de côté & d'autre à ſouhait, & le regarder du point de ſtation *S* en tournant les yeux & même la tête vers lui à droite, à gauche, en haut & en bas, ſans qu'il ceſſe de répréſenter la nature, qui eſt tout ce que l'on cherche en Perſpective. D'ailleurs il importe peu quelle proportion les quarreaux du Tableau ayent entre leurs côtés, puiſque c'eſt un principe général & conſtant en Perſpective, qu'un Tableau ou une Perſpective, ne doivent jamais être regardés avec quelque attention, que du

point de ſtation. On ne s'eſt jamais aviſé, par exemple, de ſe contraindre le moins du monde, dans les Tableaux que l'on regarde avec des miroirs cylindriques, ou coniques, &c. ſoit dans leur diſpoſition, ou dans leur deſcription, pour rendre leurs figures moins défigurées; non plus que dans ces Perſpectives dépeintes ſur une ſurface, & que l'on regarde par un trou fixe, telles que les deux fameuſes que l'on voit aux Minimes de la Place Royale à Paris; parceque tout le monde eſt perſuadé qu'elles ne ſont pas faites pour être vûes d'ailleurs que du trou d'une porte, qui eſt le ſeul point d'où elles répréſentent la nature. De même un Tableau ou Perſpective ne pouvant faire ſon effet que pour le point *O* de l'œil, on ne doit exiger de les bien voir, que de ce ſeul point. Tous les Tableaux & Perſpectives quelconques étant fondés ſur les mêmes principes, c'eſt à dire étant toujours la projection d'un plan geometral ſur une ſurface plane, ou courbe, ou mixte, pour le ſeul point où l'œil eſt ſitué, on en doit raiſonner de même.

V. PROBLÊME.

Pour ſervir de Suplément à differentes queſtions d'Hydraulique & de Marine, traitées dans nos Eſſais.

1°. L'ON a de coutume d'objecter contre notre ſyſtême du flus & reflus des mers, qu'ils devroient être plus grands en Europe, quand la Lune eſt dans le Tropique d'Eté, que quand elle eſt dans celui d'Hyver, parcequ'elle

eſt alors plus proche de l'Europe ; mais je dis que la conſequence eſt fauſſe. Car ſi la Lune en paſſant par notre Meridien & par le Tropique d'Eté, au-deſſus de notre horizon, preſſe les eaux qui ſont voiſines de l'Europe, 12 heures après étant au même Meridien ſous nos pieds, elle preſſe encore les eaux ſur notre horizon, mais au Tropique d'Hyver, & fort loin de l'Europe. Ainſi par ces deux preſſions alternatives de 12 heures, en 12 heures, nous devrions avoir toutes les 24 heures un grand flus, & un moindre ; ce qui ne peut être ; parceque ſi la Lune ſituée dans le ſolſtice d'Eté, après avoir pouſſé les eaux de l'Ocean juſques aux côtés de Norvege, quand elle a paſſé par le Meridien ſur notre horizon, ceſſoit enſuite de les preſſer ; ces eaux étant retournées vers l'Equateur, reviendroient d'elles-mêmes après 12 heures preſque à la même hauteur aux mêmes côtés, ſelon la loi des liquides qui ſe balancent par leur peſanteur. Donc elles y doivent à plus forte raiſon encore revenir, quand la Lune étant ſous nos piés au Tropique d'Eté, les preſſera ſous le Tropique d'Hyver, quoique de plus loin. Ce qui prouve que les flus & reflus de l'Ocean doivent être deux-mêmes perpetuellement égaux dans un même jour ; & ceux d'un Tropique lunaire égaux à ceux d'un autre Tropique lunaire. De ſorte que toute la difference ne peut procéder que de celle d'un des Tropiques à l'Equateur, qui peut cauſer à la verité quelque diminution, principalement ſi ce paſſage de la Lune par l'Equateur ſe fait lorſqu'elle eſt dans ſon apogée, & en même temps en quadrature ; & ſi dans un autre temps elle eſt dans ſon périgée, & en même temps dans les lyzygies, lorſqu'elle paſſe par un des Tropiques. Car dans le premier cas trois cauſes

de diminution concourant, & dans le ſecond, trois cauſes au contraire d'augmentation ſe rencontrant enſemble, la difference des flus doit être la plus ſenſible. Mais lorſque la Lune ſera diſpoſée de même, étant une fois dans un Tropique, & l'autre dans l'Equateur, les flus & reflus pourront être encore ſenſiblement égaux; parceque les deux preſſions inégales qu'elle fait dans un même jour aux tropiques, étant priſes enſemble, valent ſenſiblement autant, que les deux égales qu'elle fait en un même jour dans l'Equateur. Il en eſt de même pour tous les autres paralleles de la Lune comparés avec l'Equateur. D'où il ſuit que par raport à ces differents paralleles, les flus & reflus ſont ſenſiblement égaux tous les jours & tous les mois.

2°. Je me ſuis apperçu que je n'ai pas bien compris le ſens de la démonſtration de M. Mariotte ſur la diminution des jets d'eau, (4e Partie du Mouvement des Eaux, 2e Regle); dans le ſecond Tome de mes Eſſais, ſeconde Edition, page 323. Voici donc comme on peut perfectionner cette démonſtration. Il faut ſuppoſer que DH (figure dixiéme) eſt la hauteur d'un jet vertical connu par experience, & DE celle de ſon reſervoir; que DG eſt la hauteur à trouver d'un jet d'eau propoſé, & DA celle de ſon reſervoir; & diviſant par penſée les hauteurs DH, DG, en un nombre égal de parties indéfiniment petites & égales dans chacune, nommer p chacune des parties de DH, & chacune de celles de DG, P; & prenant EH & AL pour les diminutions d'élevation cauſées en DH & DG par (p) ſuppoſée d'air, on aura l'analogie ($EH \mid AL \parallel DE \mid DA$); parceque les diminutions de viteſſe en D par p d'air, étant

proportionnelles dans ces deux jets à leurs viteſſes totales en D, elles doivent cauſer des diminutions d'élévation EH, AL, proportionnelles aux totales DE, DA, ſelon Galilée, ce qui donne $AL = \frac{EH \times DA}{DE}$. Or les élevations DG, DH, étant produites par les mêmes cauſes, ſont ſemblales; donc la diminution d'élévation cauſée par chaque partie de DG, étant à la diminution par chaque partie de DH, comme AG à EH; EH peut repréſenter la diminution totale cauſée par p d'air ſur DH, & AG la totale cauſée par P d'air ſur DG. Prenant donc encore AG pour la diminution par P d'air ſur DG, on aura encore l'analogie, $p \mid P \parallel DH \mid DG \parallel \frac{EH \times DA}{DE} \mid \frac{DG \times EH \times DA}{DH \times DE} = AG$. Nommant donc DG, x, on aura $\left(\frac{x \times EH \times DA}{DH \times DE} = AD - x\right)$, d'où l'on tire $\left(x = \frac{AD \times DE \times DH}{DE \times DH + DA \times EH} = DG\right)$. Supoſant donc toujours DE de 839 demi pouces, DH de 761, & DA de 26 piés 1 pouce, ou 626 demi pouces, on trouve $x = DG$ de 24 piés 5 pouces, au lieu de 24 piés 2 pouces $\frac{1}{2}$. Prenant encore DA de 24 piés 5 pouces, on a DG de 22 piés 9 pou. $\frac{1}{2}$, au lieu de 22 piés 10 pouces. Enfin prenant DA de 12 piés 4 pouces, ou trouve DG de 11 piés 10 pouces $\frac{1}{2}$, au lieu de 12 piés. Ce qui eſt auſſi juſte que l'experience peut le permettre. Voyés le Mouvement des Eaux de M. Mariotte.

30. Enfin je ne dois pas tarder davantage à me retracter du calcul de la route & viteſſe d'une ſurface verticale pouſſée dans l'eau par le vent, que j'ai publiée au mois de Janvier de l'année 1714; dautant

dautant que ſi dans la figure de ce dernier Memoire, *FL* étoit la route & la viteſſe de *AD*, le vent auroit encore ſur elle la viteſſe reſpective *MD*, & la pouſſeroit avec cette viteſſe, comme ſi elle étoit en repos. Donc il augmenteroit ſa viteſſe ſelon *FC*, puiſqu'elle ne ſouffre aucune reſiſtance en ce ſens, & cela juſques à ce que *EM* fût égale à *FD*. Or alors la route & la viteſſe de la ſurface ne pourroient être *FN*; parceque le vent n'agiſſant plus ſur elle, elle auroit perdu ſa viteſſe acquiſe ſelon *HLD*, par la reſiſtance perpendiculaire de l'eau. Donc ſa derniere route & viteſſe ne pourra être autre que *F&*; ainſi il ne faut point de calcul pour la trouver; mais elle employera d'autant plus de temps à parcourir *F&*, que *F&* ſera plus longue.

A l'égard des 7 principes d'Hydraulique qui ſont contenus dans ce Mémoire, je les tiens tous pour bons, excepté le 5e, qu'il faut reformer ainſi :

5°. Enfin ſi en même temps *ab* (premiere figure du Mémoire) ſe mouvoit ſelon la droite *IK* parallelement à elle-même en *ef*, prenant *IK* pour exprimer ſa viteſſe, menant la perpendiculaire *KL* ſur *M*, & diviſant cette viteſſe *IK* dans les deux *IL*, *LK*, la ſurface *ab* ſe meuvra par *IK* comme ſi elle avoit en elle les deux viteſſes *IL*, *LK*, dont la derniere étant perpendiculaire au cours du vent *IM*, ne doit point être comptée. Ce ſera donc à l'égard du vent, comme ſi la ſurface *ab* n'avoit que la viteſſe *IL*; & par conſequent le vent la choquera de la même maniere, que ſi elle étoit fixe, & qu'il eût ſeulement la viteſſe *LM*. C'eſt pourquoi *LM* marquera toujours la multitude des parties du vent tirée de ſa viteſſe abſolue, & menant la perpendiculaire *LN* ſur *bM*; la viteſſe

reſpective LM ſe diviſera dans les deux LN, NM. Donc LN étant parallele à ab, ou ef, ne doit encore être comptée pour rien. Ainſi le vent choqueroit alors ab comme en repos avec la viteſſe reſpectivo-relative NM. Donc l'effort du vent en ce cas ſera ($Vd \times LM \times NM$).

APPROBATIONS

Pour les Additions aux Eſſais & Recherches de Mathematique & de Phyſique.

J'Ai lû par ordre de Monſeigneur le Chancelier, *le troiſiéme Volume des Recherches de Mathematique & de Phyſique, avec les Additions*, & n'y ai rien trouvé qui en doive empêcher l'Impreſſion. Fait à Paris ce 23 Juillet 1706, & 30 Avril 1707. *Signé*, FONTENELLE.

J'Ai lû les Pieces contenues dans ce troiſiéme Volume qui m'avoit été renvoyé par M. le Directeur, avec les Additions; & n'y ai rien trouvé qui en doive empêcher l'Impreſſion. Fait à Paris ce 20 & 28 Avril 1707.

Signé, CASSINI.

L'Auteur promet de donner cette année au Public ſa nouvelle Geométrie Theori-Pratique, dont la premiere Partie contient les Elemens de cette ſcience, augmentés de pluſieurs Propoſitions neceſſaires d'Archimede & autres: & la ſeconde renferme les Corps réguliers, les Coniques, les Cylindriques, les Sphériques, les Sphéroïdes, & les Conoïdes; le tout démontré par des voyes très courtes independantes de l'Algébre, & enrichi d'un grand nombre de nouvelles découvertes.

De l'Imprimerie de J. QUILLAU, rue Galande. 1715.

Table des Problêmes contenus au Supplément.

Premier Problème.

Maniere générale de déterminer la ſituation, route & viteſſe d'un Vaiſſeau, avec une application à la pratique, page 1

Second Problème.

Sur les réſiſtances des figures plânes & ſolides, geométriques, ou méchaniques, mues dans un liquide parfait avec une ſituation & une viteſſe conſtantes; & des figures de la moindre reſiſtance poſſible, page 19

Troiſiéme Problème.

Calcul du vol des oiſeaux dans toute ſes circonſtances, page 30

Quatriéme Problème.

La ſituation du Plan geométral & du Tableau dans les circonſtances les plus commodes pour la pratique de la Perſpective. page 38

Cinquiéme Problème.

Réſolution d'une Objection fondamentale, contre le ſyſtême de Deſcartes, & contre le notre, touchant le flus & reflus de la mer, page 45

Nouvelle détermination de la diminution de hauteur des Jets d'eau, par raport à celle de leurs reſervoirs, ſenſiblement juſte dans la pratique, page 49

Rétractation de la ſituation, route & viteſſe d'une ſurface plate verticale pouſſée conſtamment dans un liquide parfait, publiée dans les Mémoires de Trévoux de Janvier 1714. page 48

Errata pour le même Supplément.

PAge 1. ligne penultiéme, *CD* en *G*. pag. 2. l. 23, à *LAX* deſquelles. p. 3. l. 6, de l'eau, L'eau, &c. p. 4. l. 4, ne ſoit fixe. l. 31, dans celle de la premiere. p. 6. l. 18, ſera $V - \frac{u}{b} \times$. p. 7. l. 17, $\frac{bGE}{AG}$. D'où l'on tire $VhbGE$. l. 20, $= \pm \overline{Af \times CE} \times$. p. 9. l. 28, viteſſe AG, & ſelon. p. 13. l. 13, connoître par theorie. p. 14. l. 23, l'angle *POE*, lequel étant ôté de *POQ*. p. 15. l. 29, $BI = \frac{y^2 - ay}{y^2 + q^2} - \frac{y^2 + ay}{\sqrt{y^2 + q^2}} = \frac{q^2 + ay}{\sqrt{y^2 + q^2}}$. p. 18. l. 5, *EOQ*, & *POQ*. l. 6, valeur de x, ci-deſſus. l. 15, valeur de x, que. p. 21. l. 10, obligé d'ôter le terme conſtant $\frac{2}{12} a^2$. l. 30, la 110000e partie. p. 22. l. 4, R. P. Reynau. l. 21, $- \frac{29}{12} a^2$. l. 22, $+ 4aS \frac{ads}{4s} \times \frac{c}{16r}$. p. 23. l. 15, devant. Premier Probl. ſi. l. 29, profil *CALac*. l. derniere, baſe *CVc*, ou *CHcC*. p. 24. l. 12, devient $\frac{2r}{3}$. l. 13, entier *LAC*. l. 16, par le chap. 10. l. 21, *CALac*. p. 25. l. 4, *CALac*. l. 8, $\frac{1}{4} p + z$. l. 23, $\frac{-b^2}{a^2 - b^2}$. p. 26. l. 16, pyramide. p. 27. l. 19, paraboloïde. l. 29, on aura $\overline{-\frac{r}{4} - \frac{p}{16}}$. l. 30, $\frac{x}{s} \times \frac{LG - LP}{\overline{LP + I - LP}}$. p. 28. l. 22, *ACHca*, ou pour. p. 29. l. 11, ou $- r^2$. l. 21, $2a - 2z - 2h \cdot 2a - 2h$. p. 30. l. 21, leur ſomme. l. 25, par la précedente. p. 31. l. 6, z la viteſſe. l. derniere, point *L*, ou l'oiſeau. p. 32. l. 2, l'impreſſion de l'air. l. 20, reſiſtance, on ſe ſouviendra. p. 33. l. 20, ou de d à e. p. 34. l. 5, $m \mid t$. Ainſi. l. derniere, *Lœ*. p. 35. l. 28, *GLœ* eſt droit. l. 31, $\frac{r}{s}$, & que. p. 36. l. 19, *QÆW*, *LÆP*. p. 37, $= 4u^2y^2 - u^2pc$. p. 38. l. 9, plan *AFGB*. p. 39. l. 9, *CD*; de même. l. 29, *er* de *Le*. p. 41. l. 25, $VO = \frac{fe}{c}$. p. 44. l. 13, aſtraint. Seconde table, l. 7, nouvelle ſtatique. l. 28, M. le Marquis de l'Hôpital.

SECONDE TABLE DES PIECES que l'Auteur a publiées en differentes occaſions, depuis la premiere qu'il a jointe en 1713 à la fin du troiſiéme Tome de ſes Eſſais.

Memoires de l'Academie des Sciences.

1. SUR ſa nouvelle Satique touchant les frottemens des leviers, & des engrenemens. 24 May 1713.
2. Formule générale pour la meſure de l'aire d'une portion quelconque de la ſurface d'une Sphere. 31 Janvier 1714.
3. Second Memoire pour la meſure des ſolidités ſphériques & ſphéroïdales quelconques, apliqué au tonneau de Vallis. 21 Février 1714.
4. Sur la plus grande perfection poſſible des machines mûes par des animaux, & qui ont des poids ou des fluides à ſurmonter. . . . . 1714.

Memoires de Trévoux.

5. Sur la plus grande perfection poſſible des ailes des moulins à vent, & ſur la maniere de calculer ces ſortes de machines. Décembre 1712.
6. Nouvelles démonſtrations des régles d'alliage, & des fauſſes poſitions. Mars 1713.
7. Sur les principes de la Manœuvre, ci-devant. Janvier 1714.
8. Réſolution du fameux Problême propoſé par M. Bernoulli le jeune, & par feu M. le Maréchal de L'hôpital, ſur le Pendule d'égale tenſion, indépendamment des proprietés de la vertu centrifuge.

9. Analyſe de la nouvelle Manœuvre de M. Bernoulli le jeune, avec la réſolution des Problêmes qui nous ont été propoſés ſur cette ſcience par M. le Chevalier Renau. Décembre 1714, ou Janvier 1715.

Mercure de Paris.

10. Sur la Mélodie ou chant à une ſeule partie. Avril & Juin 1713.
11. Sur l'impoſſibilité de la quadrature du cercle en nombres exacts. Aouſt 1713.
12. Diſſertation philoſophique ſur l'ame des bêtes, contre les Carthéſiens, & contre les Athées. Septembre & Octobre 1713.
13. Pluſieurs échantillons ſur la Langue & le chant des Chinois. Octobre 1713.
14. Obſervations très exactes faites ſur le Barometre pendant trois années conſecutives. Novembre 1713.
15. L'Hiſtoire abregée des derniers tremblemens arrivés à la Ville de Monoſque en Provence. Decembre 1713.